CEBİRSEL YAPILARDA NÖTROSOFİK ÜÇLÜ KÜMELERİN MODÜLLER ÜZERİNDEKİ ETKİLERİ

Mehmet ÇELİK

Editör: Prof. Dr. Necati OLGUN

CEBİRSEL YAPILARDA NÖTROSOFİK ÜÇLÜ KÜMELERİN MODÜLLER ÜZERİNDEKİ ETKİLERİ

Mehmet ÇELİK

Mehmet ÇELİK

CEBİRSEL YAPILARDA NÖTROSOFİK ÜÇLÜ KÜMELERİN MODÜLLER ÜZERİNDEKİ ETKİLERİ

Editör: Prof. Dr. Necati OLGUN

ÖNSÖZ

Bu kitap Prof. Dr. Necati OLGUN danışmanlığında Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde tamamlamış olduğum "CEBİRSEL YAPILARDA NÖTROSOFİK ÜÇLÜ KÜMELERİN MODÜLLER ÜZERİNDEKİ ETKİLERİ" isimli doktora tezimden üretilmiştir.

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Prof. Dr. Necati OLGUN´a sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Yine bu süreçte beni hep destekleyen ve güvenen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet ÇELİK

Gaziantep, 2022

Mehmet ÇELİK

CEBİRSEL YAPILARDA NÖTROSOFİK ÜÇLÜ KÜMELERİN MODÜLLER ÜZERİNDEKİ ETKİLERİ

Editör: Prof. Dr. Necati OLGUN

GLOBAL KNOWLEDGE

Publishing House

Miami, Florida, United States of America

2022

Publishing:

GLOBAL KNOWLEDGE - Publishing House
848 Brickell Ave Ste 950 Miami
Florida 33131, United States
https://egk.ccgecon.us
info@egk.ccgecon.us

NSIA Publishing House
Neutrosphic Science International Association
https://www.publishing-nsia.com/

ISBN 978-1-59973-736-2

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

SEMBOLLER LİSTESİ

$\leq$	Alt grup
$\cong$	İzomorfizma
$\lhd$	Nomal Alt grup
$\subset$	Alt küme
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim

KISALTMALAR LİSTESİ

Çek f	f'nin çekirdeği
İm f	f'nin görüntüsü
I_R	R'nin birim elemanı
neut(x)	x'in birim elemanı
anti(x)	x'in ters elemanı
$neut_e(x)$	x'in genişletilmiş birim elemanı
$anti_e(x)$	x'in genişletilmiş ters elemanı
ACC	Artan zincir koşulu
DCC	Azalan zincir koşulu
NTM	Nötrosofik üçlü R modül
NTR	Nötrosofik üçlü halka
NTSM	Nötrosofik üçlü alt R modül
NETG	Genişletilmiş nötrosofik üçlü R modül

BÖLÜM I

GİRİŞ

Yaşamın birçok noktasında belirsiz durumlar ile karşılaşılmaktadır. Belirsiz durumlarda, hadiseleri açıklarken veya bir şeye karar verirken net ifadeler kullanmaktan kaçınılmıştır. Örneğin; birinin yaşını söylerken kişiye çok yaşlı, orta yaşlı, genç veya çok genç denilmektedir. Başka bir örnekle, hava durumu hakkında tahminde bulunurken belirsiz durumlar ortaya çıkabilmektedir. Dolayısıyla net olmayan durumlarda kişinin kararsız kalabileceği görülmektedir. Belirsiz durumların çözümüne yönelik çok farklı matematiksel modellemeler kullanılmaktadır. Bu belirsizliklerin çözümü için klasik mantık yetersiz kalmaktadır. Daha güvenilir ve kullanışlı model arayışları sonucunda, 1965 yılında Lotfi A. Zadeh [2] tarafından bulanık küme teorisi ortaya atılmıştır.

Bulanık küme teorisi de bazı belirsiz durumların çözümünde eksik kalabildiği için, bu eksiği kapatmak adına, 1986 yılında K. Atanassov [3] tarafından bulanık kümelerdeki üyelik fonksiyonu ve üye olmama fonksiyonuna belirsizliği dahil ederek bulanık kümenin daha genel hali olan sezgisel bulanık küme teorisi ortaya atılmıştır.

Smarandache 1999'da ise [1] belirsizlik durumlarına en etkili çözüm için bulanık küme ve sezgisel bulanık küme teorisini kapsayan nötrosofik küme teorisini öne sürmüştür.

Daha sonra 2010 yılında Wang ve arkadaşları [29] tarafından tek değerli nötrosofik kümeler geliştirilmiştir. Böylece, tek değerli nötrosofik küme teorisi, birbirinden bağımsız [0,1] aralığında tanımlı üç fonksiyon yardımıyla karakterize edilmiştir. Yani üyelik fonksiyonu yerine doğruluk fonksiyonu, üye olmama fonksiyonu yerine yanlışlık fonksiyonu ve bunlara ek olarak belirsizlik fonksiyonu kullanılmıştır. Bu yöntem, tek değerli nötrosofik kümeler [0,1] aralığındaki derecelendirmeleri birbirinden bağımsız olduğundan, sezgisel bulanık kümelerden daha doğru ve gerçekçi sonuçlar verebilmektedir.

Dolayısıyla nötrosofik kümeler yardımıyla belirsiz durumların çözümünde belirsizlik fonksiyonu kullanılmıştır. Belirsizlik içeren birçok durumda modelleme yapmak oldukça önemlidir. Belirsizlik içeren problemler ile uğraşmak birçok alanda zorluk oluşturmaktadır. Özellikle ekonomi, mühendislik hesaplamaları, çevre bilimi, tıbbi bilim, sosyal bilim gibi alanlarda ciddi problemlerle karşılaşılmaktadır. Klasik metotların uygulamaları yetersiz kaldığından dolayı problemlerin üstesinden gelmek oldukça zor olabilmektedir. Bu nedenle, belirsizliklerle başa çıkmada oldukça kullanışlı olan nötrosofik kümeler birçok araştırmacı için öncelikli yöntem olmuştur.

Smarandache ve Ali tarafından 2016 yılında ilk defa nötrosofik üçlü kümeler tanımlanmış, sonrasında nötrosofik üçlü gruplar ele alınmıştır [5], [8]. Nötrosofik üçlü küme olma şartı kümedeki her bir “a” elemanının en az bir etkisiz elemanı ve bir ters elemanı olmasıdır. Kümedeki her bir elemanın etkisiz elemanı bir tane olmak zorunda değildir. Ayrıca etkisiz eleman klasik gruptaki etkisiz elemandan farklı olmalıdır.

Ayrıca bir nötrosofik üçlü eleman $< a, neut(a), anti(a)>$ şeklinde gösterilir. Bundan dolayı nötrosofik üçlüdeki bu yeni yapı, klasik küme ve klasik yapılardan farklıdır. Son zamanlarda Ali ve Smarandache nötrosofik üçlü cisim ve nötrosofik üçlü halka [6]; [7] Şahin ve Kargın nötrosofik üçlü metrik uzayı, nötrosofik üçlü vektör uzayı ve nötrosofik üçlü normlu uzay [4], [11]; Smarandache, Şahin ve Kargın nötrosofik üçlü G – modulleri [13]; Bal, Moges ve Olgun nötrosofik üçlü koset ve bölüm grupları [14]; Çelik, Moges, Olgun genelleştirilmiş nötrosofik üçlü grupların temel homomorfizma teoremleri çalışılmıştır [16], [17].

Bu tezde, belirsizlik üzerine çalışan Florentin Smarandanche tarafından tanımlanmış olan nötrosofik teoriyi ele alarak, cebirin en temel konularından biri olan modül yapısı üzerine taşıyarak nötrosofik üçlü modülleri tanımlayıp, konu hakkında temel teoremler ile birlikte örnekler verilecektir. Nötrosofik üçlü kümeler klasik kümelerin genelleştirilmesi, nötrosofik üçlü gruplar ve nötrosofik üçlü halkalarda klasik grup ve klasik halkaların genelleştirilmesi olduğu gibi, aynı zamanda nötrosofik üçlü modüllerde klasik modülün genelleştirilmesidir.

Ayrıca homomorfizma, hem monomorfizma hem de epimorfizma yapılarında aynı iki cebirsel yapı arasındaki dönüşümü korumaktadır. Izomorfizma ise birebir ve örten homomorfizma ve aynı zamanda tersi olan bir homomorfizmadır. Homomorfizmalar,

farklı yapıların birbirleriyle ne kadar yakından ilişkili olduğunu göstermek için cebirsel sistemlerin sınıflandırılmasında ve numaralandırılmasında oldukça kolaylık sağlamaktadır. Klasik homomorfizmalara ve izomorfizmalara benzer olarak nötrosofik üçlü homomorfizmalar ve nötrosofik üçlü izomorfizmalar, nötrosofik üçlü halkalar, nötrosofik üçlü cisimler ve nötrosofik üçlü vektör uzayları gibi cebirsel yapılar arasındaki ilişkiyi incelemek için önemlidir.

Bu çalışmada ikinci bölüm olan temel kavramlar kısmında klasik modüllerin temel tanım ve teoremleri verilerek modül homomorfizmalarından bahsedilmiştir. Daha sonra ise daha önce üzerinde çalışılmış olan nötrosofik üçlü modüllere temel olan nötrosofik üçlü grup ile nötrosofik üçlü halka kavramları, modüllerde zincir koşulları ve karar verme hakkında temel tanım, teorem ve örnekler verilmiştir.[25]

Üçüncü bölümde ise, genişletilmiş nötrosofik üçlü cebirsel yapılar üzerinde çalışılmıştır. Bu konu ilk olarak 2014-2016 yıllarında Florentin Smarandanche ve Mümtaz Ali tarafından ortaya atıldı. Florentin Smarandanche ve Mümtaz Ali ilk olarak nötrosofik üçlü grupları tanımlamıştır [5]. Daha sonra birçok araştırmacı konu üzerinde çalışmalar yaparak nötrosofik üçlü metrik uzayı, nötrosofik üçlü vektör uzayı, nötrosofik üçlü iç çarpım, nötrosofik üçlü normlu uzayı gibi birçok yeni tanımlamalar yapmışlardır [4,11,12]. Florentin Smarandanche, nötrosofik üçlü konusu üzerinde yeni çalışmalar yaparak genişletilmiş nötrosofik üçlü küme konusu 2016 yılında tanımlamıştır [19].

Bu tezde genişletilmiş nötrosofik üçlü grup, genişletilmiş nötrosofik üçlü alt gruplar, genişletilmiş nötrosofik üçlü kosetler, genişletilmiş nötrosofik üçlü normal alt gruplar ve genişletilmiş nötrosofik üçlü faktör gruplar konuları üzerine çalışılmıştır. Konu ile ilgili temel tanım, teorem ve örnekler verilerek, bu yapıların klasik cebirdeki yapılar ile aralarındaki fark ve benzerliklerin yanı sıra, birbirleriyle olan bağlantılarından söz edilmiştir. Buna ek olarak genişletilmiş nötrosofik üçlü görüntü, genişletilmiş nötrosofik üçlü çekirdek ve genişletilmiş nötrosofik üçlü ters görüntü tanımları verilmiştir [14], [17].

Dördüncü bölümde ise nötrosofik üçlü modüllerin tanım ve teoremleri verilmiştir. Daha sonra nötrosofik üçlü alt modüller, nötrosofik üçlü bölüm modül tanımları yapılarak gerekli örneklerin verilmesinin yanı sıra klasik modüllerin en önemli kısmı olan modül homomorfizmaları ele alınarak nötrosofik üçlü teorisi üzerinde

nötrosofik üçlü modül homomorfizmaları oluşturulmuş ve konu ile ilgili örnekler verilmiştir [18]. Daha sonra zincir koşulları nötrosofik üçlü R-modül yapısına dahil edilmiştir. Nötrosofik üçlü yapılarda zincir koşullarının temel tanım ve özellikleri verilmiştir. Nötrosofik üçlü Artin ve nötrosofik üçlü Noether yapılarının tanım, teorem ve sonuçları verilmiştir. Ayrıca, nötrosofik üçlü R-modül yapısı zincir koşullarında kullanılan artan zincir koşulu (ACC) ve azalan zincir koşulu (DCC) tanımları verilmiştir [20].

Beşinci bölümde ise klasik karar verme problemlerinde yaşanan belirsiz durumlarda daha doğru sonuçlar elde etmek için daha geniş veriler ile nötrosofik karar verme aşamasına değinilmiştir. Son kısımda ise yapılan çalışmanın sonuçları ve etkileri verilmiştir [21-24].

BÖLÜM II
TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde nötrosofik üçlü modülleri tanımlamamız için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verildi. Nötrosofik üçlü modüllerden önce çalışılmış olan ve nötrosofik üçlü modüllere temel olan; nötrosofik üçlü küme, nötrosofik üçlü gruplar ve nötrosofik üçlü halkalar hakkında temel tanımlar ile bazı teorem ve örnekler verildi.

2.1. Modüller

Tanım 2.1.1: [25] R değişmeli ve birimli bir halka olsun. $\mathcal{M}$ bir değişmeli ve toplamsal grup olmak üzere;

$$\cdot : R \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$
$$(r,x) \to r.x$$

şeklinde tanımlanan bir işlem olsun. $\forall$ r, r_1, $r_2 \in R$ ve $\forall$ g, $g_1, g_2 \in \mathcal{M}$ için

(1) $r(g_1 + g_2) = r g_1 + r g_2$
(2) $(r_1 + r_2)g = r_1 g + r_2 g$
(3) $(r_1 . r_2)g = r_1(r_2 g)$

şartlarını sağlıyor ise, o zaman $\mathcal{M}$' ye bir R-modül denir. Ayrıca

(4) $\forall\, g \in \mathcal{M}$ ve $1_R \in R$ için $1_R g = g$

oluyor ise $\mathcal{M}$ modülüne birimli R-modül denir.

Tanım 2.1.2: [25] Eğer bir R-modülün üzerinde tanımlandığı değişmeli ve birimli *R* halkası yerine, bir V cismi alınırsa, o zaman R- modülü bir vektör uzayı olur. Dolayısıyla modüller vektör uzaylarının genelleştirilmiş halidir.

Örnek 2.1.3: *H* kümesini değişmeli toplamsal grup olarak ele alalım. O zaman her değişmeli grubun tam sayılar halkası üzerinde Z-modül yapısı oluşturur diyebiliriz.

$$\mu : Z \times H \to H$$

$h \in H$, $n \in Z$ olmak üzere $(k,h) \to \mu(k,h) = kh = h + h + \ldots + h$ modül yapısı vardır.

Örnek 2.1.4: *R* bir değişmeli halka olsun. *I*, *R*'nin ideali olsun.

(1) *R* halkası bir R-modüldür.
(2) *I* ideali bir R-modüldür.
(3) *R/I* bölüm halkası bir R-modüldür

$r \in R$ ve *R/I* içinde $k,t \in R$ için

$$k+I = t+I \Rightarrow k - t \in I \Rightarrow rk - rt = r\,(k - t) \in I \Rightarrow rk+I = rt+I$$

olur.

$$R \times R/I \to R/I$$
$$(r, k+I) \to rk+I$$

tanımlarıyla R/I üzerinde bir R-modül yapısı kurulabilir.

Örnek 2.1.5: *R* bir değişmeli halka olsun. $\mu : R \to N$ bir halka homomorfizması olsun. Böylece *N*, R-modül olup

$$R \times N \to N$$
$$(r, n) \to \mu(r)n$$

yapısı kurulur.

Örnek 2.1.6: *R* ve *N* iki değişmeli halka olsun. $\mu : R \rightarrow N$ bir halka homomorfizması olsun. *P, N*-modül ise *P,* R-modüldür.

$$R \times P \rightarrow P$$
$$(r, p) \rightarrow \mu(r)p$$

olacak şekilde bir modül yapısı kurulabilir.

Tanım 2.1.7: [25] *M* değişmeli bir *R* halkası üzerinde R-modül ve $N \subseteq M$ olsun. *N* bir R-modül ise *N*' ye *M*' nin alt modülü denir.

Tanım 2.1.8: [25] *R* bir değişmeli halka ve *N*' de, *M* modülünün boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. O zaman her $n_1, n_2 \in N$ ve her $a \in R$ için $n_1 + n_2 \in N$ ve $a.n_1 \in N$ oluyorsa *N*' ye *M*' nin alt modülü denir.

Teorem 2.1.9: [25] *M* değişmeli bir *R* halkası üzerinde *R*-modül olsun. *M*' nin boş kümeden farklı alt modüllerinin kesişimi de *M*' nin bir alt modüldür.

M değişmeli bir *R* halkası üzerinde R-modül ve $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *M*'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. *M*' nin alt modüllerinin toplamını $\sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ Şeklinde yazılır. $N = \emptyset$ ise $\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = 0$ olur.

(1) $\sum_{i=1}^{n} N_i = \{\sum_{i=1}^{n} n_i : n_i \in N_i$ için $i=1, 2,3,\ldots,n \}$

(2) $k_1, k_2, \ldots, k_n \in M$ olsun. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tarafından üretilen M' nin alt modülü $Rk_1 + Rk_2 +, \ldots, +Rk_n$ olur.

Tanım 2.1.10: [25] *M* değişmeli bir *R* halkası üzerinde R-modül, *I* ve *J*, *R*' nin herhangi iki ideali ve *IM* de *M*' nin bir alt modülü olsun. $IM = \{r.m : r \in I, m \in M\}$ kümesi tarafından üretilir. Aşağıdaki özelliklere sahiptir;

(1) $IM = \{\sum_{i=1}^{n} r_i m_i : r_i \in I, m_i \in M, n \in IN\}$

(2) $I(JM) = (IJ)M$

(3) $a \in R$ için *(Ra)M'* nin yerine *aM* yazılır.

Burada $(Ra)M=\{am : m \in M\}$'dir

Tanım 2.1.11: [25] *M* değişmeli bir *R* halkası üzerinde R-modül olsun. *N, M*' nin bir alt modülü olsun. $\varnothing \neq S \subseteq M$ olacak şekilde S alt küme olmak üzere;

$$(N : S) = (N :_R S) = \{r \in R : \text{her } s \in S \text{ için } rs \in N\}$$

ideal olarak tanımlanır.

Eğer *T, S* tarafından üretilen *M*'nin alt modülü ise $(N : S) = (N : T)$ olur. $m \in M$ için $(N: \{m\})$' nin yerine $(N{:}m)$ yazılabilir.

Eğer $N = 0$ ise $(0{:}S) = \{r \in R : \text{her } s \in S \text{ için } rs = 0\}$ kümesine *S*' nin nin sıfırlayanı denir. $\mathrm{Ann}_R(S)$ yada $\mathrm{Ann}(S)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $m \in M$ için *M* 'nin sıfırlayanı $(0 : m)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.12: [25] *I, R'* nin bir ideali ve aynı zamanda değişmeli bir halka olsun. O zaman

$$I = \mathrm{Ann}_R(R/I) = (0_R : r+I)$$

olur.

Önerme 2.1.13: [25] *M* değişmeli bir *R* halkası üzerinde R-modül olsun. N_1, N_2, ve *T* R-modülünün herhangi alt modülleri ve $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *M*' nin alt modüllerinin iki ailesi olsun.

(1) $(\cap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda : N) = \cap_{\lambda \in \Lambda} (T_\lambda : N)$

(2) $(T : \sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda) = \cap_{\lambda \in \Lambda} (T : N_\lambda)$

Tanım 2.1.14: [25] *M* değişmeli bir *R* halkası üzerinde R-modül olsun. *I*, $I \subset \text{Ann}(M)$ olacak şekilde *R*' nin ideali olsun. *M* üzerinde *R/I* modül yapısını oluşturalım.

a,b $\in R$ için a+*I* = b+*I* ve m $\in M$ olsun. O zaman a–b $\in I \subseteq \text{Ann}(M)$ olur. Buradan (a–b)m = 0 ve am = bm dir, böylece

$$R/I \times M \rightarrow M$$
$$(a+I,\ m) \rightarrow am$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. *M* üzerinde R-modül ve *R/I* modül yapıları ise, Her a $\in R$, m $\in M$ için (a + I)m = am şeklinde tanımlanır.

N, M' nin bir alt *R/I* modülü ise, o zaman *N, M'* nin bir alt R-modülü olur.

Tanım 2.1.15: [25] *M* değişmeli bir *R* halkası üzerinde *R*-modül, *N, M'* nin bir alt modülü ve *I'* da *R*' nin bir ideali olsun. O zaman $(N:{}_{m}I) = \{m \in M : \text{her } x \in I \text{ için } xm \in N\}$ *M*' nin alt modülü olur ve $N \subseteq (N:{}_{m}I)$ 'dir. Eğer *N* = 0 ise

$$(0:{}_{m}I) = \{m \in M : \text{her } x \in I \text{ için } xm = 0\}$$

olur.

Önerme 2.1.16: [25] *M* değişmeli bir *R* halkası üzerinde R-modül, *N, M'* nin bir alt modülü, $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, *M*' nin alt modüllerinin bir ailesi ve *P,S,T'* de *R*' nin idealleri, $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *R*' nin ideallerinin bir ailesi olsun.

(1) $((N:{}_{m}T):{}_{m}P) = (N:{}_{m}TP) = ((N:{}_{m}P):{}_{m}T)$

(2) $(\cap N_\lambda:{}_{m}S) = \cap(N_\lambda:{}_{m}S)$

(3) $(N:{}_{m}\sum I_\lambda) = \cap(N:{}_{m}I_\lambda)$

olur.

Tanım 2.1.17: [25] *M* değişmeli bir *R* halkası üzerinde R-modül olsun. *N, M*' nin bir alt modülü olsun. O zaman $M/N = \{m+N : m \in M\}$ olacak şekilde bir bölüm grubu yazılabilir.

$$m+N = m_1+N \Leftrightarrow m-m_1 \in N$$

ve her m, $a \in N$ için $(m+N)+(a+N) = (m+a)+N$ olur, böylece

$$\cdot: R \times M/N \rightarrow M/N$$

$$(r, m+N) \rightarrow rm+N$$

olur. *M/N* değişmeli grubu değişmeli bir *R* halkası üzerinde R-modüldür. *M/N* modülüne *M*' nin bölüm modülü denir ve *M/N* ile gösterilir

Önerme 2.1.18: [25] *M* değişmeli bir *R* halkası üzerinde *R*-modül ve *I, R'* nin bir ideali olsun. O zaman $I \subseteq Ann_R(M/IM)$ ve *M/IM*, her $a \in R$ ve $m \in M$ için

$$(a + I)(m + IM) = am + IM$$

tanımıyla *M/IM* bir *R/I* modül yapısına sahiptir.

Önerme 2.1.19: [25] *M* değişmeli bir R halkası üzerinde R-modül ve *N, M*' nin bir alt modülü olsun. O zaman

(1) $N \subseteq N_1$ olacak şekilde N_1, *M*' nin bir alt modülü ise N_1/N, *M/N*' nin bir alt modülüdür.
(2) $N \subseteq N_2$ olacak şekilde *M/N'* nin herhangi bir alt modülü için N_2/N olur.
(3) N_1, N_2, *N*' yi içeren *M*' nin alt modülleri için

$$N_1 \subseteq N_2 \Leftrightarrow N_1/N \subseteq N_2/N$$

olur.

Önerme 2.1.20: [25] *M* değişmeli bir *R* halkası üzerinde R-modül ve N_1, N_2' de *M*' nin herhangi iki alt modülü olsun. O zaman

$$Ann((N_1+N_2)/N_1) = (N_1:N_2)$$

olur.

2.2. Modül Homomorfizmaları ve İzomorfizmaları

Tanım 2.2.1: [25] *M* ve *N* bir değişmeli bir *R* halkası üzerinde iki R-modül olsun. $f:M\rightarrow N$ dönüşümü her x,y $\in M$ ve r$\in R$ için f fonksiyonu

(1) $f(x+y) = f(x)+f(y)$

(2) $f(rx) = r.f(x)$

şartlarını sağlıyorsa *f* fonksiyonuna R-modül homomorfizması denir .

Tanım 2.2.2: [25] *M* ve *N* değişmeli bir *R* halkası üzerinde iki R-modül olsun. Bir $f:M\rightarrow N$ fonksiyonu her x$\in M$ için $f(x) = 0_N$ olarak tanımlanırsa bu fonksiyon bir R-modül homomorfizmasıdır ve buna sıfır homomorfizma denir. 0_N ile gösterilir.

Tanım 2.2.3: [25] *U* ve *V* değişmeli bir *R* halkası üzerinde iki R-modül olsun. $\mu:U\rightarrow V$ birebir ve örten bir modül homomorfizması ise bu homomorfizmaya bir izomorfizma denir ve $U\cong V$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.4: [25] *U* ve *V* değişmeli bir *R* halkası üzerinde iki R-modül olsun. $\mu:U\rightarrow V$ bir izomorfizma olsun. O zaman $\mu^{-1}:V\rightarrow U$ de aynı zamanda bir izomorfizmadır ve $U \cong V$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.5: [25] Eğer μ: $Z\rightarrow V$ ve ϕ: $W\rightarrow Z$ iki R-modül homomorfizma ise $\mu o \phi$: $W\rightarrow V$ bir R-modül homomorfizmasıdır.

Eğer μ: $Z\rightarrow V$ ve ϕ: $W\rightarrow Z$ iki R-modül izomorfizması ise $\mu o \phi$: $W\rightarrow V$ bir R-modül izomorfizmasıdır.

Tanım 2.2.6: [25] *M* bir değişmeli *R* halkası üzerinde R-modül ve *N, M'* nin bir alt modülü olsun. Her $m \in M$ için $m \rightarrow f(m) = m+N$ olarak tanımlanan $f{:}M \rightarrow M/N$ dönüşümüne doğal (kanonik) homomorfizma denir ve *f* örtendir.

Tanım 2.2.7: [25] *M, N* değişmeli bir *R* halkası üzerinde R-modülleri olsun. $f{:}M \rightarrow N$ bir R-modül homomorfizması ise

(1) *f*' nin çekirdeği $Çekf = \{m \in M \; : \; f(m) = 0_N\}$ ile gösterilir. *Çekf*, *M*' nin bir alt modülüdür. *Çekf* = *0* olduğunda *f* monomorfizma olur.

(2) *f* fonksiyonunun görüntüsü *Görf* ile gösterilir ve $f(M) = \{f\,(m) \; : \; m \in M\}$ kümesi *N* kümesinin alt kümesidir. *Görf*, *N* kümesinin bir alt modülüdür.

(3) $f : M \rightarrow M/K$, *çekf* = *K* ve $M/0 \cong M$ dir.

(4) *Çekf* = *N* olacak şekilde $f : M \rightarrow S$ homomorfizması varsa $N \subseteq M$, *M'* nin bir alt modülüdür.

Teorem 2.2.8: [25] *M* ve *N* bir değişmeli bir *R* halkası üzerinde iki R-modül ve $\mu{:}M \rightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun. O zaman *f* fonksiyonu her $m \in M$ için

$$\mu\,(m + çek\mu) = \mu(m)$$

olacak şekilde

$$\mu{:}\; M \,/\, Çek\mu \rightarrow Gör\;\mu$$

izomorfizması var ve

$$M \,/\, Çek\mu \cong Gör\;\mu$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2.9: [25] *M* bir değişmeli *R* halkası üzerinde R-modül, *N*, N_1, *M*' nin $N \subseteq N_1$ olacak şekilde alt modülleri olsun. N_1/N, M/N R-modülünün bir alt modülüdür. O zaman burada her $m \in M$ için $\eta((m+N)+ N_1/N) = m+ N_1$ nin

$$\eta : (M/N) \,/\, (N_1/N) \rightarrow (M/N_1)$$

olacak şekilde bir izomorfizması vardır.

Teorem 2.2.10: **[25]** *M* bir değişmeli *R* halkası üzerinde R-modül olsun. *L* ve *K* ise *M* nin alt modülleri olsun. O zaman her $a \in L$ için $\eta(a+L \cap K) = a+K$ olduğundan

$$\eta : L / (L \cap K) \rightarrow (L+K) / K$$

olacak şekilde bir izomorfizması vardır.

2.3. Nötrosofik Üçlü Gruplar

Tanım 2.3.1: [5] *N* boş kümeden farklı bir küme olsun. * bir ikili işlem olmak üzere *N* kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa (*N*, *) kümesine bir nötrosofik üçlü küme denir.

1) Her a ∈ *N* için,

a*neut(a)= neut(a)* a=a olacak şekilde bir neut(a) elemanı vardır.

2) Her a ∈ N için,

a*anti(a)= anti(a)* a=neut(a) olacak şekilde bir anti(a) elemanı vardır.

Ayrıca bir a∈ *N* için nötrosofik üçlü eleman (a, neut(a), anti(a)) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.2: [5] (*N*,*) bir nötrosofik üçlü küme olsun. (*N*,*) kümesi aşağıdaki şartları sağlarsa (*N*,*)' ye nötrosofik üçlü grup denir.

1) Her a, b ∈ *N* için a*b ∈ *N*, (kapalılık özelliği)

2) Her a, b, c ∈ *N* için (a*b)*c = a*(b*c), (birleşme özelliği)

Teorem 2.3.3: [5] (*N*,*) bir nötrosofik üçlü grup olsun.

Eğer a = neut(a) ise neut(a) = anti(a) = a olacak şekilde en az bir anti(a) ∈ *N* vardır.

Teorem 2.3.4: [5] (*N*,*) bir nötrosofik üçlü grup olsun.

i) neut(neut(a)) = neut(a)
ii) anti(neut(a)) = neut(a)

iii) anti(anti(a))= a

iv) neut(anti(a)) = neut(a)

2.4. Nötrosofik Üçlü Halkalar

Tanım 2.4.1: [10] R boş kümeden farklı , toplama ve çarpma ikili işlemi üzerinde tanımlanan bir küme olsun. Aşağıdaki özellikler sağlarsa (R, +, .) cebirsel yapısına bir halka denir.

1) (R,+) değişmeli grup ,
2) (kapalılık Özelliği) R , çarpma işlemi altında kapalı
3) (Birleşme Özelliği) ∀ $p, r, s \in R$ için $(p.r).s = p.(r.s)$
4) (Dağılma Özelliği) ∀ $p, r, s \in R$ için
   $p.(r + s) = p.r + p.s \quad (p + r).s = p.s + r.s$

Tanım 2.4.2: [10] (NTR,*,#), * ve # ikili işlem üzerinde bir küme olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa NTR'ye nötrosofik üçlü halka denir.

1.(NTR, *) * işlemine göre değişmeli bir nötrosofik üçlü grup.

2. (NTR,#) iyi tanımlı ve birleşme özelliğini sağlar.

3. Her m, n, k ∈ NTR için;

m # (n * k) = (m # n) * (m # k) ve (n * k) # m = (n # m) * (k # m)

Genel olarak bir nötrosofik üçlü halka klasik bir halka değildir.

Tanım 2.4.3: [10] (NTR,*,#) nötrosofik üçlü halka olsun ve a ∈ NTR olsun. Her a elemanının $neut_{\#}$(a) olması durumunda bu yapıya birimli nötrosofik üçlü halka denir.

Tanım 2.4.4: [10] (NTR, *, #) nötrosofik üçlü halka olsun. NTR, # işlemine göre birimli ve değişmeli ise, bu yapıya değişmeli ve birimli nötrosofik üçlü halka denir.

Teorem 2.4.5: [10] NTR değişmeli nötrosofik üçlü halka ve a, b ∈ NTR olsun. a, b, $neut_{\#}(a)$, $neut_{\#}(b)$, $neut_{\#}(a\#b)$ ve $anti_{\#}(a\#b)$ elemanları NTR de var ise $anti_{\#}(a)$, $anti_{\#}(b)$ de vardır. Yani;

1. $neut_{\#}(a) \# neut_{\#}(b) = neut_{\#}(a \# b)$

2. $anti_{\#}(a) \# anti_{\#}(b) = anti_{\#}(a \# b)$ dir.

Tanım 2.4.6: [10] (NTR,*,#) nötrosofik üçlü halka olsun ve 0≠a ∈ NTR olsun. Eğer sıfırdan farklı eleman 0≠b ∈ NTR varsa, b # a = 0 olur. O zaman b'ye a'nın nötrosofik üçlü sol sıfır böleni denir. Benzer bir şekilde, 0≠ b ∈ NTR , 0≠a ∈ NTR olmak üzere a # b = 0 ise b'ye a'nın nötrosofik üçlü sağ sıfır böleni denir. Her ikisi sağlanıyorsa bu yapıya nötrosofik üçlü sıfır bölen denir.

Tanım 2.4.7: [10] (NTR, #) bir nötrosofik üçlü halka olsun ve S, NTR'nin bir alt kümesi olsun. (S,*, #) nötrosofik üçlü halka özelliklerini sağlıyorsa S, NTR'nin nötrosofik üçlü alt halkası olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.8: [10] (NTR,*,#) nötrosofik bir üçlü halka olsun ve *I*, NTR'nin bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, *I* ya NTR için nötrosofik üçlü ideal denir.

1. (*I*,*) (NTR, *) 'nın nötrosofik üçlü alt grubudur
2. Her x ∈ *I* ve r ∈ NTR, x*r ∈ *I* ve r*x ∈ *I* dır.

Teorem 2.4.9: [10] Her nötrosofik üçlü ideali, sıfır bölenli nötrosofik üçlü bir kümedir. Ancak bunun tersi genel olarak doğru değildir.

Önerme 2.4.10: [10] (NTR,*,#) nötrosofik üçlü halka ve a ∈ NTR olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur.

1. $anti_{*}(a)$ genel olarak NTR'de tek değildir.
2. $anti_{\#}(a)$, (eğer bazı a elemanları varsa) genel olarak NTR'de tek değildir.

Tanım 2.4.11: [10] (NTR,*,#) nötrosofik üçlü halka olsun ve $0 \neq a \in$ NTR olsun. $n \geq 1$ bazı pozitif tam sayı için $(a_{\#})^n = 0$ ise, nötrosofik üçlü nilpotent eleman olarak adlandırılır. Burada $(a_{\#})^n = \underbrace{a\#a\#\ldots.\#a}_{n}$ (n tane a dan oluşur).

Teorem 2.4.12: [10] NTR değişmeli nötrosofik üçlü halka ve $a \in$ NTR olsun. Böylece NTR'de n pozitif tamsayısı için $neut_{\#}(a^n)$, $anti_{\#}(a^n)$ ve a, neut(a) NTR'de aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

1. $(neut_{\#}(a))^n = neut_{\#}(a^n)$,
2. $(anti_{\#}(a^n)^n = anti_{\#}(a^n)$.

Tanım 2.4.13: [6] NTR değişmeli nötrosofik üçlü halka olsun. a, b ∈ NTR, a # b = 0 için

a = 0 veya b = 0 ise, NTR ye nötrosofik üçlü tamlık bölgesi adı verilir.

Tanım 2.4.14: [6] (NTR, *, #) iki ikili işlem üzerinde nötrosofik üçlü küme olsun. O zaman (NTR,*, #) aşağıdaki koşulları sağlıyorsa nötrosofik üçlü cisim olarak adlandırılır.

1. (NTR,*) cebirsel yapısı * işlemine göre NTR değişmeli nötrosofik üçlü gruptur.
2. (NTR, #) cebirsel yapısı # işlemine göre NTR nötrosofik üçlü bir gruptur.
3. Her m, n, k ∈ NTR için

   m # (n * k) = (m # n) * (m # k) ve (n * k) # m = (n # m) * (k # m).

Örnek 2.4.15: Aşağıdaki tabloya göre tanımlanan ({m, n, k},*,#) grubu ele alalım. Kurala göre * iyi tanımlanmış ve değişmelidir. (Çünkü; tablo 1 de matris diyagonal olarak simetriktir.)

Tablo 2.4.15.1 * işlemine göre nötrosofik üçlü grup tablosu.

*	m	n	k
m	m	m	m
n	m	n	m
k	m	m	k

Birleşme özelliğini gösterelim: Her x, y, z ∈ {m, n, k} için x * (y * z) = (x * y) * z

(1) x, y, z arasında en az bir “m” varsa, sonuç şudur:

x * (y * z) = m ve (x * y) * z = m, çünkü “m” her elemanı “m” ye dönüştürür. Yukarıdaki tablo 1’e göre;

m * m = m * n = n * m = m * k = k * m = m

(2) Sadece n'ler varsa, o zaman n * (n * n) = n ve (n * n) * n = n.

(3) Sadece k'ler varsa, k * (k * k) = k ve (k * k) * k = k'dir.

(4) İki n ve bir k veya iki k ve bir n varsa, x * (y * z) = m ve (x * y) * z = m,

n'nin k ile çarpılması yani; * işlemine göre n * k = k * n = m elde edileceğinden “m” nin her elemanı m ye dönüştürdüğü görülmektedir. * işlemine göre nötrosofik üçlü kümenin elemanları: (m, m, m), (m, m, n), (m, m, k), (n, n, n), (k, k, k) şeklinde olacaktır. * işlemine göre klasik birim elemanı yoktur. Dolayısıyla, ({m, n, k}, *) değişmeli nötrosofik üçlü gruptur.

Tablo 2.4.15.2 # işlemine göre nötrosofik üçlü halka tablosu.

#	m	n	k
m	m	m	m
n	m	m	m
k	m	m	m

Her x, y, z ∈ {m, n, k) için, x# (y#z) = m ve (x#y) #z = m olduğu aşikardır. Çünkü tüm çarpmalar # işlemine göre sonuç daima “m” vermektedir. * işlemine göre dağılma özelliğini ispatlayalım. Her x, y, z ∈ {m, n, k) için, x#(y*z) = m için,

herhangi bir elemanın * işlemine göre “m” yi vermektedir. Dolayısıyla (x # y) * (x # z) = m * m = m dir.

({m, n, k ,#) kümesi nötrosofik üçlü yapıyı oluşturmamaktadır. Sadece (m, m, m) nötrosofik üçlü olduğu için (n ve k elemanları nötrosofik üçlü oluşturmadı) ({m, n, k},#) kümesi nötrosofik üçlü grup değildir. Dolayısıyla ({m, n, k},*,#) kümesi nötrosofik üçlü halka olup nötrosofik üçlü cisim olmamaktadır.

Tanım 2.4.16: [7] (NTR_1, *, #) ve (NTR_2, ⨁, ⨂) iki nötrosofik üçlü halka olsun. *f*: $NTR_1 \rightarrow NTR_2$ bir fonksiyon olsun. Daha sonra, aşağıdaki koşullar doğruysa *f* 'ye nötrosofik üçlü halka homomorfizması denir.

1. Tüm r, s ∈ NTR_1 için, *f* (r * s) = *f* (r)⨁ f (s).

2. Tüm r, s ∈ NTR_1 için, *f* (r # s) = *f* (r)⨂*f* (s).

3. Tüm r ∈ NTR_1 için, *f* (neut * (r)) = $neut^{\oplus}$ (*f* (r)).

4. Tüm r ∈ NTR_1 için, *f* (anti * (r)) = $anti^{\oplus}$ (*f* (r)).

Teorem 2.4.17: [7] *f*: $NTR_1 \rightarrow NTR_2$, nötrosofik üçlü halka homomorfizması olduğunu varsayalım. Böylece aşağıdakiler doğrudur.

1. Eğer *S*, NTR_1 (*,#)’nin nötrosofik üçlü alt halkası ise, *f* (*S*), NTR_2 (⨁, ⨂)'nin nötrosofik üçlü althalkasıdır.

2. *U*, NTR_2'nin nötrosofik üçlü alt grubu ise, $f^{-1}(U)$, NTR_1'nin nötrosofik üçlü alt grubudur.

3. Eğer *I*, NTR_2’nin nötrosofik üçlü ideali ise, o zaman f^{-1} (I), NTR_1‘nin nötrosofik üçlü idealidir.

4. *f* örten ve *J*, NTR_1’nin ideali ise,o zaman *f (J)*, NTR_2’nin idealdir.

Tanım2.4.18: [13] (NTF,$*_1$, $\#_1$) bir nötrosofik üçlü cisim ve (NTV,$*_2$, $\#_2$), $*_2$ ve $\#_2$ işlemlerine göre bir nötrosofik üçlü küme olsun. (NTV,$*_2$, $\#_2$) kümesi aşağıdaki şartları sağlarsa (NTV,$*_2$, $\#_2$)’ ye (NTF,$*_1$, $\#_1$) nötrosofik üçlü cisim üzerine bir nötrosofik üçlü vektör uzayı denir.

1) Her p, r ∈ NTV ve her c ∈ NTF için p$*_2$r ∈ NTV ve p $\#_2$c ∈ NTV;

2) Her p, r, s ∈ NTV için (p$*_2$r)$*_2$s= p$*_2$ (r$*_2$s); ;

3) Her p, r ∈ NTV için $p *_2 r = r *_2 p$;

4) Her c ∈ NTF ve p, r ∈ NTV için $(r *_2 p) \#_2 c = (r \#_2 c) *_2 (p \#_2 c)$;

5) Her c, s ∈ NTF ve p ∈ NTViçin $(c *_1 s) \#_2 p = (c \#_2 p) *_1 (s \#_2 p)$;

6) Her c, s ∈ NTF ve p ∈ NTV için $(c \#_1 s) \#_2 p = c \#_1 (s \#_2 p)$;

7) Her bir p ∈ NTV için $p \#_2$ neut(c) = neut(c)$\#_2$ p = p olacak şekilde en az bir c ∈ NTF vardır.

Ayrıca 1), 2) ve 3) şartları (NTV,$*_2$)' nin bir değişmeli üçlü grup olduğunu gösterir.

2.5. Zincir Koşulları

Tanım 2.5.1: [20] M bir sağ R-modül olsun. M nin alt modülleri ailesinden bir

$L_1 \leq L_2 \leq \ldots$ (1)

artan zincirini göz önüne alalım. Eğer (i = 1, 2, . . .) i¸cin $L_{n+i} = L_n$ olacak şekilde bir n tamsayısı varsa, (1) zincirine artan zincir koşulunu (ascending chain condition) sağlıyor denir. Benzer şekilde

$K_1 \geq K_2 \geq \ldots$ (2)

azalan zincirini zincirini göz önüne alalım. Eğer (i = 1, 2, . . .) için $K_{n+i} = K_n$ olacak şekilde bir n tamsayısı varsa (2) zincirine azalan zincir koşulunu (descending chain condition) sağlıyor denir.

Bundan sonra bu koşullar sırası ile ACC ve DCC olarak gösterilecektir.

Tanım 2.5.2: [20] M bir sağ R-modül olsun. Eğer M nin alt modülleri ailesinden alınan her artan zincir ACC yi sağlıyor ise, M ye Noether modül denir. Eğer M nin alt modülleri ailesinden alınan her azalan zincir DCC yi sağlıyor ise, M ye Artin modül denir.

Tanım 2.5.3: [20]

R halka ve $0 \rightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\phi} \mathrm{N} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{M} \rightarrow 0$ R-modülde tam sıralı olsun. O zaman;

(1) $\mathcal{N}$ modülü noether modüldür ancak ve ancak $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{M}$ modülleri noether modüllerdir.

(2)) $\mathcal{N}$ modülü artin modüldür ancak ve ancak $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{M}$ modülleri artin modüllerdir.

2.6. Tek Değerli Nötrosofik Kümeler

Tanım 2.6.1: [21] X evrensel bir küme olmak üzere x ∈ X olsun. X üzerindeki H nötrosofik kümesinin doğruluk fonksiyonu T_H(x), belirsizlik fonksiyonu I_H(x) ve yanlışlık fonksiyonu F_H(x) ile gösterilir. T_H(x), I_H(x) ve F_H(x) $]0^-, 1^+[$ aralığının standart ya da standart olmayan alt kümesidir. Öyle ki

$$T_H(x): X \to]0^-, 1^+[\,,\ I_H(x): X \to]0^-, 1^+[\text{ ve } F_H(x): X \to]0^-, 1^+[$$

dır. Böylelikle T_H(x), I_H(x) ve F_H(x)' nin toplHmı

$$0^- \leq supT_H(x) + supI_H(x) + supF_H(x) \leq 3^+$$

dır.

Tanım 2.6.2: [21] Her x ∈ X için H nötrosofik kümesinin tümleyeni H^c ile gösterilir ve H^c nötrosofik kümesinin üyelik fonksiyonları

$T_H^c = \{1^+\} \ominus T_H(x)$,

$I_H^c = \{1^+\} \ominus I_H(x)$,

$F_H^c = \{1^+\} \ominus F_H(x)$,

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 2.6.3: [22] Her x ∈ X için K nötrosofik kümesinin H nötrosofik kümesini kapsaması yani

$$H \subseteq K \leftrightarrow inf\, T_H(x) \leq inf\, T_K(x),\ sup\, T_H(x) \leq sup\, T_K(x)$$

$$inf\, I_H(x) \leq inf\, I_K(x),\ sup\, I_H(x) \leq sup\, I_K(x)$$

$$inf\, F_H(x) \leq inf\, F_K(x),\ sup\, F_H(x) \leq sup\, F_K(x)$$

şeklindedir.

Tanım 2.6.4: [23] X evrensel bir küme olsun. ∀ x ∈ X, $0 \leq T_H(x) + I_H(x) + F_H(x) \leq 3$ olmak üzere, $T_H(x):X \to [0,1]$, $I_H(x):X \to [0,1]$ ve $F_H(x):X \to [0,1]$ fonksiyonları ile X üzerinde bir H tek değerli nötrosofik küme

$$H = \{(x, T_H(x), I_H(x), F_H(x)) : x \in X\}$$

kümesi ile tanımlanır. Burada $T_H(x)$, $I_H(x)$ ve $F_H(x)$ sırasıyla $x \in X$ nin doğruluk, belirsizlik ve yanlışlık derecesidir.

Tanım 2.6.5: [24] H ve K tek değerli nötrosofik kümeler için aşağıdaki işlemler tanımlanmıştır:

(1) $H \subseteq K \Leftrightarrow T_H(x) \leq T_K(x)$, $I_H(x) \geq I_K(x)$ ve $F_H(x) \geq F_K(x)$ $\forall x \in X$.

(2) $H = K \Leftrightarrow H \subseteq K$ ve $K \subseteq H$.

(3) $H = \{\langle x, F_H(x), 1 - I_H(x), T_H(x)\rangle, x \in X\}$.

(4) $H \cup K = \langle \max(T_H(x), T_K(x)), \min(I_H(x), I_K(x)), \min(F_H(x), F_K(x))\rangle$ $\forall x \in X$.

(5) $H \cap K = \langle \min(T_H(x), T_K(x)), \max(I_H(x), I_K(x)), \max(F_H(x), F_K(x))\rangle$ $\forall x \in X$.

(6) $H \times K = \langle T_H(x) + T_K(x) - T_H(x).T_K(x), I_H(x).I_K(x), F_H(x).F_K(x)\rangle$ $\forall x \in X$.

BÖLÜM III

GENİŞLETİLMİŞ NÖTROSOFİK ÜÇLÜ HOMOMORFİZMALARIN TEMEL TEOREMLERİ

3.1. Nötrosofik üçlü Homomorfizmaların Temel Teoremi

Bu bölümde verilen genişletilmiş nötrosofik üçlü gruplar arasında grup işlemini koruyan dönüşümler ele alınmıştır. Bu dönüşümler yardımıyla verilen grupların cebirsel yapılarının aynı olup olmadığı araştırılmıştır.

Tanım 3.1.1: [1] *N* herhangi bir küme ve * bir ikili işlem olsun. Eğer *N* kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa (*N*, *) kümesine genişletilmiş nötrosofik üçlü küme denir.

1) Her a ∈ *N* için,

$$a * e^{neut(a)} = e^{neut(a)} * a = a$$

olacak şekilde bir $e^{neut(a)}$ elemanı vardır.

2) Her a ∈ *N* için,

$$a * e^{anti(a)} = e^{anti(a)} * a = e^{neut(a)}$$

olacak şekilde bir $e^{anti(a)}$ elemanı vardır.

Ayrıca bir a ∈ *N* genişletilmiş nötrosofik üçlü eleman (a, $e^{neut(a)}$, $e^{anti(a)}$) şeklinde gösterilir. Buradaki a elemanının etkisiz elamanı klasik cebirdeki etkisiz eleman ile aynı ya da farklı olabilir.

Teorem 3.1.2: [16] $(N,*)$ değişmeli genişletilmiş nötrosofik küme ve * bir ikili işlem olsun. $a, b \in N$;

(i) neut(a) * neut(b) = neut(a * b);

(ii) anti(a) * anti(b) = anti(a * b);

Teorem 3.1.3: [16] *(N,∗)* değişmeli genişletilmiş nötrosofik üçlü küme ve * bir ikili işlem olsun. $A \in N;$

(i) neut(a) * neut(a) = neut(a);

(ii) anti(a) * neut(a) = neut(a) * anti(a) = anti(a);

dır.

Tanım 3.1.4: [1] *(N,∗)* genişletilmiş nötrosofik üçlü küme olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa bu kümeye genişletilmiş nötrosofik üçlü grup (NETG) denir.

a) Her $x, y \in N$ *için* $x * y \in N$.

b) Her $x, y, z \in N$ *için* $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Klasik grup NETG şartlarını sağlar fakat tersi her zaman doğru değildir. Çünkü, klasik grubun etkisiz elamanı tektir.

Tanım 3.1.5: [14] *(N , ∗) NETG* ve *H*, *N* nin alt kümesi olsun. *H,∗* işlemi altında aşağıdaki şartları sağlarsa *(N , ∗)* kümesine genişletilmiş nötrosofik üçlü altgrup denir.

1) $e^{neut(x)} \in H$.

2) Her x , y $\in H$, x ∗ y $\in H$.(kapalılık özelliği)

3) Her x $\in H$ için $e^{anti(x)} \in H$.

Tanım 3.1.6: [14] *N NETG ve* $H_1, H_2 \leq N$ olsun. Her n $\in N$ için H_1 = nH_2(anti(n)) sağlanıyorsa H_1 *ve* H_2 kümelerine nötrosofik üçlü eşlenik denir.

Tanım 3.1.7: [14] *(N_1, ∗)* ve *(N_2, ∘)* iki farklı *NETG* olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $f : N_1 \longrightarrow N_2$ dönüşümüne nötrosofik üçlü grup homomorfizması denir.

a) Her x , $y \in N$ için

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$$

b) (x, neut(x), anti(x)) N_1 kümesinde üçlü bir form olsun,

$$f(\text{neut}(x)) = \text{neut}(f(x))$$

$$f(\text{anti}(x)) = \text{anti}(f(x)).$$

Tanım 3.1.8: [14] $f : N_1 \rightarrow N_2$ nötrosofik üçlü grup homomorfizması ve *f, NETG (N_1, ∗) den NETG (N_2, ∘) ye* bir dönüşüm olsun. Nötrosofik üçlü görüntü kümesi

$$\text{Gör}(f) = \{ f(g) : g \in N_1, * \}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.9: [14] $f : N_1 \rightarrow N_2$ nötrosofik üçlü grup homomorfizması ve *f, NETG (N_1, ∗) den NETG (N_2, ∘) ye* bir dönüşüm ve $B \subseteq N_2$ olsun.

$$f^{-1}(B) = \{x \in N_1 : f(x) \in B\}$$

kümesine nötrosofik üçlü ters görüntü kümesi denir.

Tanım 3.1.10: [14] $f : N_1 \rightarrow N_2$ nötrosofik üçlü grup homomorfizması ve *f*, NETG (N_1, ∗) den NETG (N_2, ∘) ye bir dönüşüm olsun. Nötrosofik üçlü çekirdek kümesi

$$\text{Çek}(f) = \{x \in N_1 , \text{neut}(x) \in N_2 : f(x) = \text{neut}(x)\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.11: [14] *N* genişletilmiş nötrosofik üçlü grup olsun. *Z(N)* kümesine *NETG* nin nötrosofik üçlü merkezi denir.

$$Z(N) = \{a \in N : \varphi_a = \text{neut}_N\}$$

$= \{a \in N : ab(anti(a)) = b, \forall b \in N\}$

$= \{a \in N : ab = ba, \forall b \in N\}.$

olarak tanımlanır.

N kümesi değişmelidir ancak ve ancak $Z(N) = N$ dir.

Tanım 3.1.12: [14] *N NETG* ve $H \subseteq N$ olsun. $\forall x \in N$ için $xh/h \in H$ ise bu kümeye nötrosofik üçlü koset adı verilir. x*H* şeklinde gösterilir.

$$Hx = hx/\ h \in H$$

$$(xH)anti(x) = (xh)anti(x)/\ h \in H.$$

$h \leq N$ için *xH, H* nin nötrosofik üçlü sol koseti;*Hx, H* nin nötrosofik üçlü sağ koseti denir. *xH* ve *Hx* elemanlarının sayısı |*xH*| ve |*Hx*| şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.13: [14] *H, NETG* nin genişletilmiş nötrosofik üçlü altgrubu olsun. $\forall x \in N$ için $aH(anti(a)) \subseteq H$ sağlıyor ise N kümesine genişletilmiş nötrosofik üçlü normal altgrup denir. $H \neq N$ *ise* $H \trianglelefteq N$ veya $H \triangleleft N$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1.14: *N NETG* olsun. Her $a \in N$ için $\{neut(a)\} \triangleleft N$ *ve* $N \trianglelefteq N$.

Tanım 3.1.15: [14] *N NETG ve* $H \trianglelefteq N$ nötrosofik üçlü normal altgrup olsun. $(xH)(yH) = (xy)H$ işlemi tanımlansın ve *H* nin nötrosofik üçlü kosetleri var ise *N/H* kümesine nötrosofik üçlü bölüm grubu denir.

3.2. Nötrosofik Üçlü Homomorfizmalar

Bu bölümde nötrosofik üçlü monomorfizma, nötrosofik üçlü epimorfizma, nötrosofik üçlü izomorfizma, nötrosofik üçlü otomorfizma tanımları yer almaktadır. Ayrıca bu tanımlar ile ilgili temel teoremler verilmiştir.

Tanım 3.2.1: [17] $(N_1, *)$ *ve* $(N_2, \circ)$ iki farklı *NETG* olsun. $f : N_1 \longrightarrow N_2$ dönüşümü *NETG* de birebir ise *f* homomorfizmasına nötrosofik üçlü grup monomorfizması denir.

Teorem 3.2.2: [17] $(N_1, *)$ *ve* $(N_2, \circ)$ iki farklı *NETG* olsun. $\varphi : N_1 \longrightarrow N_2$ nötrosofik üçlü monomorfizmadır ancak ve ancak Çekφ = $\{neut_{N1}\}$.

İspat:

φ birebir olsun. a ∊ Çekφ ise

$\varphi(a) = neut_{N2} = \varphi(neut_{N1}), \forall a \in N_1$

birebir olduğundan $a = neut_{N1}$. Böylece Çekφ = $\varphi(neut_{N1})$ olur.

$a,b \in N_1$ olup $\varphi(a) = \varphi(b)$ dir. Buradan a = b yi gösterelim.

$$neut_{N1} = \varphi(b)anti(\varphi(a))$$
$$= \varphi(b)\ \varphi(anti(a))$$
$$= \varphi(b(anti(a))).$$

Böylece b(anti(a))) ∊ Çekφ ve Çekφ = $\varphi(neut_{N1})$ olacaktır. Buradan da

b(anti(a))) = $neut_{N1}$ sonucuna varırız. Yani; a = b elde edilir.

Tanım 3.2.3: $(N_1, *)$ *ve* $(N_2, \circ)$ iki farklı *NETG* olsun. $f : N_1 \longrightarrow N_2$ dönüşümü *NETG* de örten ise *f* fonksiyonuna nötrosofik üçlü grup epimorfizması denir.

Teorem 3.2.4: [17] *N* ve *H* iki farklı *NETG* olsun. $\varphi : N \longrightarrow H$ nötrosofik üçlü grup homomorfizması ise $\varphi^{-1} : H \longrightarrow N$ de nötrosofik üçlü grup homomorfizmasıdır.

İspat:

k = φ(m), t = φ(n), ∀ m, n ∊ N olsun. ∀ k, t ∊ H için m = anti(φ(k)), n = anti(φ(t)) dir. Böylece

$$anti(kt) = \varphi(\varphi(m)\ \varphi(n))$$
$$= anti(\varphi(mn)) = mn$$

$$= \text{anti}(\varphi(k))\text{anti}(\varphi(t))$$

olup ispat biter.

Teorem 3.2.5: [17] *N* genişletilmiş nötrosofik üçlü grup ve $a,b \in N$ olsun. $\phi : N \longrightarrow OtoN$ dönüşümü altında $a \longrightarrow \varphi_a$ dönüşümü bir nötrosofik üçlü grup homomorfizmasıdır.

İspat:

Herhangi bir sabit $t \in N$ için

$$\varphi_{rs}(N) = rst(\text{anti}(rs)) = rst(\text{anti}(r))\text{anti}(s) = \varphi_r(st(\text{anti}(s)) = \varphi_r\, \varphi_s(t), \text{ so } \varphi_{rs} = \varphi_r\, \varphi_s$$

buradan $\phi(rs) = \phi(r)\, \phi(s)$ eşitliği elde edilir.

anti-neut elemanı yani;

$$\varphi(\text{anti}(t)) = \text{anti}(\varphi_t)$$

$$\varphi_t\, \text{anti}(\varphi_t(r)) = t\,(\text{anti}(t)rt)\text{anti}(t) = r$$

olduğundan φ_t grup homomorfizmasıdır.

Teorem 3.2.6: [17] $g : N \longrightarrow S$ bir nötrosofik üçlü grup homomorfizması olsun.

$s \in S$ *ve* $t \in g^{-1}(s)$ ise $g^{-1}(s) = t$. Çek$g$

dir.

İspat .

1) $g^{-1}(s) \subseteq t$. Çek$g$ olduğunu gösterelim. $t \in g^{-1}(s)$ olsun. O zaman $g(t) = s$ ve $b \in g^{-1}(s)$ olduğundan $g(b) = s$ olur. $g(t) = g(y)$ ise, teorem 3.2.5 ve tanım 3.2.1 den

$$\text{anti}(g(t))g(t) = \text{anti}(g(t))g(b)$$

$$\text{neut}_S = g(\text{anti}(t))g(b)$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla anti(t)b ∊ Çek$g$ olduğundan;

en az bir k ∊ Çek$g$, anti(t)b = k dır.

b = tk ise

$$b \in t\text{Çek}g \Rightarrow g^{-1}(s) \subseteq t\text{Çek}g \qquad (1)$$

2) tÇek$g$ ⊆ $g^{-1}(s)$ olduğunu gösterelim. b ∊ tÇek$g$ olsun. En az bir k ∊ Çek$g$, b = tk ⇒ $g(b) = g(tk) = g(t)g(k) = s\ \text{neut}_S = s$

$g^{-1}(s) = b$ ve b ∊ $g^{-1}(s)$ ise o zaman

$$t\text{Çek}g \subseteq g^{-1}(s) \qquad (2)$$

olup (1) ve (2) den tÇek$g$ = $g^{-1}(s)$ elde edilir.

Teorem 3.2.7: [17] $\varphi : N_1 \longrightarrow N_2$ nötrosofik üçlü grup homomorfizması olsun. N_1 ve N_2 , *NETG* olmak üzere*;*

(1) $H_2 \trianglelefteq N_2$ *ise* $\varphi^{-1}(H_2) \trianglelefteq N_1$ *dir.*

(2) $H_1 \trianglelefteq N_1$ ve φ nötrosofik üçlü grup epimorfizma ise $\varphi(H_1) \trianglelefteq N_2$ dir.

İspat:

(1) x ∊ $\varphi^{-1}(H_2)$ ve a ∊ N_1 ise φ(x) ∊ H_2 dir. H_2 nötrosofik üçlü normal altgrup olduğu için φ((ax)(anti(a)) = φ(a) φ(x)anti(φ(a)) ∊ H_2 olur. ax(anti(a)) ∊ $\varphi^{-1}(H_2)$ elde edilir. Diğer şartlar normal alt grubun ters görüntüsü normal altgrup olduğundan sağlanır.

(2) H_1 nötrosofik üçlü normal altgrup olduğundan, φ(a) φ(H_1)anti(φ(a)) ⊆ φ(H_1) dir. φ örten olduğunu kabul edelim, her b ∊ N_2 için b = φ(a), a ∊ N_1 olarak yazabiliriz. Bu yüzden b φ(H_1)anti(b) ∊ φ(H_1) olur.

Teorem 3.2.8: [17] *N NETG* ve $H \trianglelefteq N$ olsun.

$$\varphi : N \longrightarrow N/H$$
$$\text{n} \longrightarrow nH$$

dönüşümü genişletilmiş nötrosofik grup homomorfizmasıdır. Bu homomorfizmaya doğal(kanonik) homomorfizma denir. Bu homomorfizmanın çekirdeği *H* dır.

İspat:

$\varphi(ab) = (ab)H = (aH)(bH) = \varphi(a)\ \varphi(a)$ olduğundan, φ nötrosofik üçlü grup homomorfizmasıdır. Bu homomorfizmanın çekirdeği,

$a \in$ Çek$\varphi \Leftrightarrow \varphi(a) = H$ *(H, N/H* da etkisiz olduğundan) $\Leftrightarrow aH = H$ *(φ* nin tanımından) $\Leftrightarrow a \in H$ olur.

3.3. Nötrosofik Üçlü İzomorfizmalar

Tanım 3.3.1: [17] $(N_1, *)$ *ve* $(N_2, \circ)$ iki farklı genişletilmiş nötrosofik üçlü grup olsun. $f : N_1 \longrightarrow N_2$ dönüşümü nötrosofik üçlü grup homomorfizması ve aynı zamanda birebir ve örten ise *f ye* nötrosofik üçlü grup izomorfizması denir. Burada N_1 *ve* N_2 nötrosofik üçlü izomorfiktir denir. $N_1 \cong N_2$ ile gösterilir.

Teorem 3.3.2: [17] $(N_1, *)$ *ve* $(N_2, \circ)$ iki farklı *NETG* olsun. $\varphi : N_1 \longrightarrow N_2$ nötrosofik üçlü grup izomorfizması ise o zaman $\varphi^{-1} : N_2 \longrightarrow N_1$ homomorfizması da izomorfizmadır.

İspat:

φ'nin birebir ve örten olduğu açıktır. Şimdi φ'nin nötrosofik üçlü grup homomorfizması olduğunu gösterelim. $\forall$ a,b $\in N_1$, $\forall$ x,y $\in N_2$ olmak üzere x = φ(a), y = φ(b) ve a = anti(φ(x)), b = anti(φ(y)) olacaktır.

Böylece anti(φ(xy)) = anti(φ(φ(a) φ(b))) = anti(φ(φ(ab))) = ab = anti(φ(x))anti(φ(y)) olur.

Tanım 3.3.3: [17] $(N_1, *)$, genişletilmiş nötrosofik üçlü grup olsun. $f : N_1 \longrightarrow N_1$ dönüşümü birebir ve örten ise *f* ye nötrosofik üçlü grup otomorfizması denir.

Önerme 3.3.4: [17] *N, NETG* olsun. a $\in N$ için $f_a : N \longrightarrow N$ öyle ki x $\longrightarrow$ ax(anti(a) bir nötrosofik üçlü grup otomorfizmasıdır(*OtoN*).

İspat:

(1). $\forall$x, y $\in N$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ olduğunu gösterelim.

ax(anti(a)) = ay(anti(a)) ⇒ ax(anti(a))a = ay(anti(a))a ⇒ ax(neut(a)) = ay(neut(a)) ⇒ ax = ay ⇒ anti(a)ax = anti(a)ay ⇒ neut(a)x = neut(a)y ⇒ x = y.

Bu yüzden , *f* birebirdir.

(2). ∀ x, y $\in N$, f(x) = ax(anti(a)) = y olduğunu gösterelim.

ax(anti(a))a = ya ⇒ ax(neut(a)) = ya ⇒ ax = ya ⇒anti(a)ax = anti(a)ya ⇒ neut(a)x = anti(a)⇒ x = anti(a) *olur*. Böylece, *f* örtendir. Dolayısıyla, f_a nötrosofik üçlü grup otomorfizmasıdır.

Lemma 3.3.5: [17] *N NETG* a $\in N$ olmak üzere $a^2 = a$ olması için a = neut(a) olmalıdır.

İspat:

a = neut(a) * a (etkisiz elaman aksiyomu)

= (anti(a) * a) * a ,anti(a) ∈ N için (ters elaman aksiyomu)

= anti(a) * a^2 (birleşme özelliği)

= anti(a)* a ($a^2 = a$)

= neut(a) (ters elaman tanımından).

elde edilir.

Teorem 3.3.6: [17] *N NETG* ve $H_1, H_2 \leq N$ olsun. $H_1H_2 = \{ab : a \in H_1, b \in H_2\}$ genişletilmiş nötrosofik üçlü küme genişletilmiş nötrosofik üçlü altgruptur ancak ve ancak $H_1H_2 = H_2H_1$ dir.

İspat:

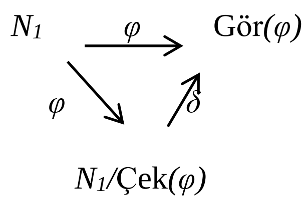
H_1H_2 genişletilmiş nötrosofik üçlü altgrup olduğunu varsayalım. O zaman, her $a \in H_1$, $b \in H_2$, anti(a)anti(b) $\in H_1H_2$ yani $H_2H_1 \subseteq H_1H_2$ olduğunu görürüz. Fakat $h \in H_1H_2$ için $a \in H_1$, $b \in H_2$ olur.

anti(h) = ab ise h = anti(b)anti(a) $\in H_2H_1$ olup bu yüzden $H_1H_2 \subseteq H_2H_1$ dolayısıyla $H_1H_2 = H_2H_1$ olur. Tersini varsayalım $H_1H_2 = H_2H_1$ ise o zaman $\forall a, a' \in H_1$ $b, b' \in H_2$ $aba'b' \in aH_2H_1b' = aH_1H_2b' = H_1H_2$ olduğunu görürüz. Ayrıca $\forall a \in H_1, b \in H_2$ için

anti(ab) = anti(b)anti(a) $\in H_2H_1 = H_1H_2$ olacaktır.

Teorem 3.3.7: [17] $(N_1, *)$ ve $(N_2, \circ)$ iki farklı *NETG* olsun. $\varphi: N_1 \longrightarrow N_2$ dönüşümü nötrosofik üçlü grup homomorfizması olsun.O zaman, N_1/Çek$(\varphi) \cong$ Gör(φ). Ayrıca φ bir nötrosofik üçlü epimorfizma ise

$$N_1/\text{Çek}\varphi \cong N_2 \quad \text{dir.}$$



İspat : δ : N_1/Çek$(\varphi) \longrightarrow$ Gör(φ) dönüşümünü varsayalım. Bu dönüşümün nötrosofik üçlü grup izomorfizması ve iyi tanımlı olduğunu ispat edelim. Çek(φ), N_1 in nötrosofik üçlü normal alt grubudur. K=Çek(φ), $N_1/K = \{aK : a \in N_1\}$ olduğunu hatırlayalım. $\delta : N_1/K \longrightarrow$ Gör(φ), $\delta : nK \longrightarrow \varphi(n)$, $n \in N_1$ olacak şekilde tanımlayalım. Böylece aşağıdaki şartları kontrol etmemiz gerekiyor.

(1). δ iyi tanımlıdır

(2). δ birebirdir

(3). δ örtendir

(4). δ nötrosofik üçlü grup homomorfizmasıdır

(1) $aK = bK$ olduğunu gösterelim. $\delta(aK) = (bK)$ olduğundan $aK = bK$ dır. $aK = bK \Rightarrow anti(b)aK = K \Rightarrow anti(b)a \in K$ olduğunu biliyoruz. Burada, $neut_{(n2)} = \varphi(anti(b)a) = \varphi(anti(b)\, \varphi(a) = anti(\varphi(b))\, \varphi(a) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$ olacaktır. Böylece, $\delta(aK) = \varphi(a) = \varphi(b) = \delta(bK)$ olup iyi tanımlı olduğu görülür.

(2). $\delta(aK) = \delta(bK) \Rightarrow aK = bK$ olduğunu gösterelim. $\delta(aK) = \delta(bK)$ olduğunu varsayalım. O zaman $\delta(aK) = \delta(bK) \Rightarrow aK = bK$ dır.

$\Rightarrow \varphi(anti(b))\, \varphi(a) = neut_{(n2)} \Rightarrow \varphi(anti(b)a) = neut_{(n2)} \Rightarrow anti(b)a \in K \Rightarrow anti(b)aK = K\ (aN_2 = N_2 \Leftrightarrow a \in N_2)$. Böylece, δ birebirdir.

(3). (N_1/K) alanında herhangi bir eleman alalım. δ tarafından dönüşüm yapılsın. $\varphi(a) \in$ Gör(φ) olacak şekilde herhangi bir eleman alalım. Tanım gereğince $\delta(aK) = \varphi(a)$ olup δ örtendir.

(4). $\delta(aK\ bK) = \delta(aK)\ \delta(bK)$ olduğunu gösterelim. $\delta(aK\ bK) = \delta(abK)\ \ (aK\ bK = abK) = \varphi(ab) = \varphi(a)\ \varphi(b) = \delta(aK\ bK) = \delta(aK)\ \delta(bK)$ dır. Böylece δ bir nötrosofik üçlü grup homomorfizmasıdır.

Özet olarak şunu söyleyebiriz, $\delta : N_1/K \longrightarrow$ Gör(φ) iyi tanımlı nötrosofik üçlü grup homomorfizması birebir ve örtendir. Dolayısıyla δ bir nötrosofik üçlü grup izomorfizmasıdır. Yani $N_1/K \cong$ Gör(φ) dir.

Sonuç 3.3.8: [17] (Nötrosofik üçlü homomorfizma temel teoreminin özel durumları).

• N = (1, 1, 1) aşikar genişletilmiş nötrosofik üçlü olsun. $\phi : N_1 \longrightarrow N_2$ ise nötrosofik Çek(ϕ) = {neut(1) =$1N_1$}. Böylece teorem 3.3.7 den dolayı Gör$(\phi) \cong N_1/\ 1N_1\} \cong N_1$ dir.

• $\phi : N_1 \longrightarrow N_2$ dönüşümü $\phi(n)$ = neut(1) = $1N_2$ her $n_2 \in N_1$ için sağlıyorsa nötrosofik Çek$(\phi) = N_1$ olup teorem 3.3.7 den dolayı $1N_2$ = Gör$(\phi) \cong N_1/\ N_1$ dir.

Örnek 3.3.9: Genişletilmiş nötrosofik üçlü alterne grup A_n , permütasyon *NETG* S_n genişletilmiş nötrosofik üçlü için bir alt gruptur. $[S_n : A_n] = 2$ dir.

Çözüm : $[S_n : A_n] = 2$ olduğunu gösterelim. Nötrosofik üçlü Çek$\varphi = A_n$ $\varphi : S_n \longrightarrow Z_2$ örten nötrosofik üçlü grup homomorfizması olduğunu gösterelim. Burada Z_2 nin genişletilmiş nötrosofik üçlüleri (0, 0, 0) ve (1, 1, 1) dir. $S_n / A_n \cong Z_2$ elde edilirse böylece $|S_n / A_n| = |Z_2| = 2$ olduğu kanıtlanmış olur.

Dolayısıyla $[S_n : A_n] = |S_n / A_n| = 2$ sonucu elde edilecektir.

$$\varphi : S_n \longrightarrow Z_2 \quad \varphi(f) = \begin{cases} [0] & \text{f çift ise} \\ [1] & \text{f tek ise} \end{cases}$$

φ fonksiyonu örtendir. Şimdi de φ nin bir nötrosofik üçlü grup homomorfizması olduğunu gösterelim.

$\forall x, y \in S_n$ için $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(xy)$ dir. Burada x ve y hem tek hem de çift olduğundan xy çifttir. x çift ve y tek ise ve ya x tek ve y çift ise o zaman xy tektir. Böylece aşağıdaki gibi 4 farklı durum oluşacaktır.

1) x ve y tek ise o zaman xy çifttir. Yani $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(xy) = [0]$. $[0] + [0] = [0]$ dır.

2) x çift ve y tek ise xy tektir. Yani $\varphi(x) + \varphi(y) = [0] + [1] = [1] = \varphi(xy)$ dir.

3) x tek ve y çift ise 2. Durum ile aynıdır.

4) x ve y tek ise o zaman xy çifttir. Yani $\varphi(x) + \varphi(y) = [1] + [1] = [0] = \varphi(xy)$ dir. Böylece φ nin bir nötrosofik üçlü grup homomorfizması olduğu ispatlandı. Son olarak, nötrosofik üçlü çekirdek kümesi Çek$\varphi = \{ x \in S_n : \varphi(x) = [0]_2 \}$ tüm çift permütasyonların bir genişletilmiş nötrosofik üçlü kümesidir. O halde Çek$\varphi = A_n$ dir.

3.4. Birinci Nötrosofik Üçlü İzomorfizma Teoremi

Teorem 3.4.1: [17] *N, NETG* ve *H, K N* nin iki genişletilmiş nötrosofik üçlü altgrubu olsun. *H, K* da nötrosofik üçlü normal altgrup olsun. O zaman

a) HK, N nin nötrosofik üçlü altgrubudur.

b) $H \cap K$, K da nötrosofik üçlü normal altgruptur.

c) $HK/H \cong K/H \cap K$ dır.

İspat .

a) $xy \in HK$ olsun. $x = h_1k_1$ ve $y = h_2k_2$ ise $h_1h_2 \in H$ ve $k_1,k_2 \in K$ olur. Dolayısıyla

$x(anti(y)) = (h_1k_1)anti(h_2k_2)$

$= (h_1k_1)anti(k_2)anti(h_2)$

$= h_1(k_1(anti(k_2)))anti(h_2)$, $(k_3 = k_1(anti(k_2)) : k_3 \in K$

$= h_1k_3(anti(h_2))$

$= h_1k_3(anti(h_2))anti(k_3)k_3$

$=$ ($H \lhd k$ ve $h_3 = k_3(anti(h_2))anti(k_3) \in H$ olduğundan) $h_1h_2k_3$

$\Rightarrow x(anti(y) = h_4k_3 \in HK$, $(h_4 = h_1h_2)$

$\Rightarrow$HK, N nin genişletilmiş nötrosofik üçlü alt grubu olacaktır.

b) $H \cap K$, K veya $H \cap K \lhd K$ da nötrosofik üçlü normal altgrup olduğunu ispatlamalıyız. $x \in H \cap K$ ve $x \in K$ olsun. $x \in H$ ve $x \in K$ olur. $H \lhd K$ olduğundan $kx(anti(k)) \in H$ ve $xk \in K$ olduğundan $kx(anti(k)) \in K$ olur. Böylece $kx(anti(k)) \in H \cap K$ olur. O halde $H \cap K \lhd K$ elde edilir.

c) *$HK/H \cong K/H \cap K$* .

$H \cap K = D$ olsun. Bu yüzden $K/D = K/H \cap K$ olur. $\phi(hk) = KD$ olacak şekilde $\phi : HK \longrightarrow K/D$ dönüşümünü ele alalım.

1. ϕ iyi tanımlı olduğunu gösterelim

$h_1k_1 = h_2k_2$, $h_1h_2 \in H$ ve $k_1k_2 \in K$

$k_1 h_1' = k_2 h_2'$

$\Rightarrow anti(k_2)k_1h_1' = h_2'$

$\Rightarrow anti(k_2)k_1 = h_2'(anti(h_1))$, $h_2'(anti(h_1)) \in H$

$\Rightarrow$ anti(k_2)$k_1 \in$ H, but anti(k_2)$k_1 \in$ K

$\Rightarrow$ anti(k_2)$k_1 \in H \cap K = D$

$\Rightarrow$ anti(k_2)$k_1 \in D$

$\Rightarrow$ anti(k_2)$k_1D = D$

$\Rightarrow k_1D = k_2D$

$\Rightarrow \phi(h_1k_1) = \phi(h_2k_2)$.

2. ϕ nötrosofik üçlü grup homomorfizması olduğunu gösterelim.

$\Phi(h_1k_1.h_2k_2) = \phi(h_1(k_1h_2)k_2$

$= \phi(h_1h2^{'}k_1k_2)$

$= k_1k_2D$

$= k_1Dk_2D$

$= \phi(h_1k_1).\phi(h_2k_2)$

3. ϕ örten olduğunu gösterelim.

Her KD $\in$ K/D olduğundan neut.k $\in$ HK dır. ϕ homomorfizma olduğundan ϕ(neut.k) = KD dir. Böylece ϕ örten fonksiyondur.

Buradan da teorem 3.3.7 den dolayı

$$HK/Çek\phi \cong K/D$$

Olduğunu göstermek için Çekϕ = H olduğunu göstermemiz gerekir. h $\in$ H ve h(neut) $\in$ HK olsun. Dolayısıyla

$\phi(h) = \phi(h.neut) = neut.D =$

$\Rightarrow \phi(h) = D$

$\Rightarrow$h $\in$ Çekϕ olduğundan H $\subseteq$ Çekϕ dir.

Tersine bakacak olursak; h $\in$ H ve k $\in$ K olduğundan hk $\in$ Çekϕ dir.

$\phi(hk) = D$ ise KD = D $\Rightarrow$ k $\in$ D = H $\cap$ K

$\Rightarrow$h $\in$ H ve k $\in$ K

$\Rightarrow hk \subseteq H$

$\Rightarrow$ Çek$\phi \subseteq$ H. Böylece H = Çekϕ

olur. O halde HK/H ≅ K/H∩K ispatlanmış olur.

3.5. İkinci Nötrosofik Üçlü İzomorfizma Teoremi

Teorem 3.5.1: [17] *N NETG* olsun. *H ve K, K ⊆ H* olacak şekilde, N nin nötrosofik üçlü normal altgrupları olsun. O zaman

$$H/K \lhd N/K$$

ve

$$N/K \big/ H/K \cong N/H$$

dır.

İspat:

H, K N'nin nötrosofik üçlü normal alt grupları ve *K ⊆ H* olduğundan *H/K, N/K* bölüm grupları tanımlansın. Ψ: *N ⟶ N /H* dönüşümünü ele alalım. Nötrosofik üçlü çekirdek ve *H, K* yı kapsar. Böylece, N/K ⟶ N/H bir nötrosofik üçlü grup homomorfizması olduğunu gösterir. Bu dönüşümün örten olduğu aşikardır. Aslında, nötrosofik üçlü sol koset nK dan nötrosofik üçlü sol koset nH a olan bir dönüşümdür. Böylece N/K ⟶ N/H ve *K ⊆* ÇekΨ olup nK nötrosofik üçlü çekirdektir. O zaman nötrosofik üçlü sol koset nH doğal nötrosofik üçlü kosettir. Yani; nH = H ve n ∈ H dır. Dolayısıyla nötrosofik üçlü çekirdek, n ∈ H ve nK olmak üzere nötrosofik üçlü sol kosetleri oluşturur. Yani; H/K dır.

1. Ψ iyi tanımlı olduğunu gösterelim. ak = bk olsun.

$$anti(b)ak = k$$

$$anti(b)a \in k$$

$$\Rightarrow K \lhd H$$

$$anti(b)a \in H$$

$$aH = bH\ (anti(b)aH = H)$$

$$\Psi(ak) = \Psi(bk)$$

dır.

2. Ψ nötrosofik üçlü grup homomorfizması olduğunu gösterelim.

$$a_k, b_k \in N/K$$

$$\Psi(a_k b_k) = \Psi(abk) = abH = aHbH = \Psi(ak)\,\Psi(bk)$$

dır.

3. Ψ örten olduğunu gösterelim.

$$\text{Her } y = aH \in N/H,\ x = ak \in N/K \Rightarrow \Psi(x) = y \text{ dir.}$$

4. ÇekΨ = H/K olduğunu gösterelim.

N /H ın etkisiz elemanı H dır. Dolayısıyla ÇekΨ : $\{xk \in N/K : \Psi(xk) = H\}$

$$= \{xk \in N/K : \Psi(xk) = xH = H\}$$

$$= \{xk \in N/K : x \in H\}$$

$$= \{xk \in H/K\}$$

$$= H/K \text{ dır.}$$

Teorem 3.3.7 den dolayı $N/K \big/ H/K \cong N/H$ dır.

BÖLÜM IV
NÖTROSOFİK ÜÇLÜ R-MODÜL

Bu bölümde nötrosofik üçlü R modül ve nötrosofik üçlü R-altmodül tanımları yapıldı. Daha sonra nötrosofik üçlü modül özelliklerinin klasik modül özelliklerinden farklı olduğu gösterildi.

4.1 Nötrosofik Üçlü R-Modül

Tanım 4.1.1: [18] (R,+,.) nötrosofik üçlü halka ve (M,+) nötrosofik üçlü değişmeli grup olsun. $R \times M \rightarrow M$, (r,m)→r.m olacak şekilde ikili işlem tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa (M,+) ye (R, +, .) üzerinde nötrosofik üçlü R-modül diyeceğiz.

1) m.(n+k) =(m.n)+(m.k), $\forall$ n, k $\in M$ ve m $\in R$.

2) (m+k).n = (m.n)+(k.n), $\forall$ m, k $\in R$ ve $\forall$ n $\in M$

3) (m.k).n = m.(k.n), $\forall$ m, k $\in R$ ve $\forall$ n $\in M$

4) her m $\in M$ için $\exists$ c $\in R$, m.neut(c)= neut(c).m = m

Örnek 4.1.2: M ={p, r, s} bir küme olsun. M nin kuvvet kümesi P(M)={ ∅, {p}, {r}, {s}, {p, r}, {p, s}, {r, s}, {p,r,s}} olmak üzere;

(P(M), ∪) birleşim işlemine göre değişmeli nötrosofik üçlü gruptur.

Tablo 4.1.2.1 U işlemine göre nötrosofik üçlü grup tablosu.

U	∅	{p}	{r}	{s}	{p, r}	{p, s}	{r, s}	{p,r,s}
∅	∅	{p}	{r}	{s}	{p, r}	{p, s}	{r, s}	{p,r,s}
{p}	{p}	{p}	{p, r}	{p, s}	{p, r}	{p, s}	{p,r,s}	{p,r,s}
{r}	{r}	{p, r}	{r}	{r, s}	{p, r}	{p,r,s}	{r, s}	{p,r,s}
{s}	{s}	{p, s}	{r, s}	{s}	{p,r,s}	{p, s}	{r, s}	{p,r,s}
{p, r}	{p, r}	{p, r}	{p, r}	{p,r,s}	{p,r}	{p,r,s}	{p,r,s}	{p,r,s}
{p, s}	{p, s}	{p, s}	{p,r,s}	{p, s}	{p,r,s}	{p, s}	{p,r,s}	{p,r,s}
{r, s}	{r, s}	{p,r,s}	{r, s}	{r, s}	{p,r,s}	{p,r,s}	{r, s}	{p,r,s}
{p,r,s}	{p,r,s}	{p,r,s}	{p,r,s}	{p,r,s}	{p,r,s}	{p,r,s}	{p,r,s}	{p,r,s}

Tablo 1 simetrik olduğundan P(M), U işlemine göre değişmeli olduğu görülür. P(M), U işlemine göre nötrosofik üçlü grup olduğunu gösterelim. Öncelikle her elemanın bir nötrosofik üçlü oluşturduğunu gösterelim.

(∅,neut(∅),anti(∅)) = (∅,∅,∅),

({p},neut{p}, anti{p})=({p},∅,yok)=({p},{p},{p})=({p},{p},∅)

({r},neut{r}, anti{r})=({r},∅,yok)=({r},{r},{r})=({r},{r},∅)

({s},neut{s}, anti{s})=({s},∅,yok)=({s},{s},{s})=({s},{s},∅)

({p,r},neut{p,r}, anti{p,r})=({p,r},∅,yok)=({p,r},{p},yok)=({p,r},{r},yok)=
({p,r},{p,r}, {p,r}), ({p,r},{p,r}, ∅)

({p,s},neut{p,s}, anti{p,s})=({p,s},∅,yok)=({p,s},{p},yok)=({p,s},{s},yok)=
({p,s},{p,s}, {p,s}),({p,s},{p,s}, ∅)

({r,s},neut{r,s}, anti{r,s})=({r,s},∅,yok)=({r,s},{r},yok)=({r,s},{s},yok)=
({r,s},{r,s}, {r,s}),({r,s},{r,s}, ∅)

({p,r,s},neut{p,r,s},anti{p,r,s})=({p,r,s},∅,yok)=({p,r,s},{p},yok)=({p,r,s},{r},yok)=({p,r,s},{s}, yok)=({p,r,s},{p,r},yok))=({p,r,s},{p,s},yok))=({p,r,s},{r,s},yok)=({p,r,s},{p,r,s},{p,r,s})=({p,r,s},{p,r,s}, ∅)

Görüldüğü gibi birleşim işlemine göre her elemanın bir ya da birden fazla etkisiz elemanı olup her elemanın da tersi bulunmaktadır. Ayrıca tablo 1 de görüldüğü gibi kapalılık özelliği sağlanmaktadır.

Son olarak her *A, B, C* ∊ *P(M)* için *(AUB)UC=AU(BUC)* olacak şekilde birleşme özelliği de sağlanmış olup *P(M)* değişmeli nötrosofik üçlü gruptur.

Tablo 4.1.2.2 ∩ işlemine göre nötrosofik üçlü halka tablosu.

∩	∅	{p}	{r}	{s}	{p, r}	{p, s}	{r, s}	{p,r,s}
∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
{p}	∅	{p}	∅	∅	{p}	{p}	∅	{p}
{r}	∅	∅	{r}	∅	{r}	∅	{r}	{r}
{s}	∅	∅	∅	{s}	∅	{s}	{s}	{s}
{p, r}	∅	{p}	{r}	∅	{p,r}	{p}	{r}	{p, r}
{p, s}	∅	{p}	∅	{s}	{p}	{p, s}	{s}	{p,s}
{r, s}	∅	∅	{r}	{s}	{r}	{s}	{r, s}	{r,s}
{p,r,s}	∅	{p}	{r}	{s}	{p,r}	{p,s}	{r,s}	{p,r,s}

(*P(M),* ∪, ∩) birleşim ve kesişim işlemleri altında neut(*F*)= *F,* anti(*F*) = *F* olacak şekilde nötrosofik üçlü halka olduğunu gösterelim.

1) Tablo 1 e göre *(P(M),*∪*)* kümesi değişmeli nötrosofik üçlü gruptur.
2) Her *X, Y, Z* ∈ *P(M)* için

$$X \cap (Y \cap Z) = X \cap (Y \cap Z)$$

şeklinde birleşmeli ve iyi tanımlı olmaktadır.

3) Her *X, Y, N* ∈ *P(M)* için

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

dağılma özelliği de sağlanmış olup ($P(M)$, ∪, ∩) kümesinin bir nötrosofik üçlü halka olduğu görüldü.

Son olarak $P(M)$, ($P(M)$, ∪, ∩) nötrosofik üçlü halka üzerinde bir nötrosofik üçlü R-modül şartlarını sağladığını gösterelim:

1) Her $X, Y, Z \in P(M)$ için

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

dir.

2) Her $X, Y, Z \in P(M)$ için

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z).$$

dir.

3) Her $X, Y, Z \in P(M)$ için

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

dir.

4) Her $F \in P(M)$ için $F \cap neut(F) = neut(F) \cap F = F$ olacak şekilde en az bir $neut(F) = F \in P(M)$ vardır. Örnek olarak F={p,r} nötrosofik üçlü olarak ({p,r},neut({p,r},anti{p,r}) = ({p,r},{p,r},{p,r}) şeklinde en az bir nötrosofik üçlü oluşturulmaktadır.

Böylece ($P(M)$, ∪, ∩) bir nötrosofik üçlü R-modüldür.

Sonuç 4.1.3: [18] Tanım 4.1.1 in 4. Koşulunda neut(F) tek olmak zorunda olmadığı için nötrosofik üçlü R-modül klasik R-modülden farklıdır.

Sonuç 4.1.4: [18] Tanım 4.1.1 ve 2.3.4 ten her nötrosofik üçlü vektör uzayı bir nötrosofik üçlü R modüldür fakat tersi doğru değildir.

Not: (NTR,+ , *) değişmeli nötrosofik üçlü halka olsun. +, * ikili işlemler için sırasıyla etkisiz elemanlar $neut_{+}$(a) ve $neut_{*}$(a), ters eleman için ise $anti_{+}$(a) ve $anti_{*}$(a) şeklinde tanımlanacaktır.

Önerme 4.1.5: [18] *M*, (*R*,+, *) nötrosofik üçlü halka üzerinde nötrosofik üçlü R-modül olsun. Her $m \in M$ ve her $c \in R$ için en az bir $n \in M$ vardır öyle ki;

$$neut_{+}(c)*m = neut_{+}(n)$$

dir.

İspat: Nötrosofik üçlü grubun özelliklerine göre

$neut_{+}$(c) *m = ($neut_{+}$(c)+$neut_{+}$(c)) *m dir. (1)

Ayrıca tanım 4.1.1 den

$neut_{+}$(c) *m=($neut_{+}$(c)+$neut_{+}$(c)) *m=($neut_{+}$(c) *m)+($neut_{+}$(c) *m) (2)

eşitliğinden $neut_{+}(c)*m \in M$ elde edilir. Buradan $neut_{+}$(c) *m = n olduğu görülür. Böylece (2) den en az bir n ∈ *M* vardır. Böylece;

n = $neut_{+}$(n) olup $neut_{+}$(c) *m = $neut_{+}$(n)

elde edilir.

Tanım 4.1.6: [18] *M, R* nötrosofik üçlü halka üzerinde nötrosofik üçlü R-modül ve $N \subset M$ olsun. Eğer *N, R* nötrosofik üçlü halka üzerinde nötrosofik üçlü R-modül ise *N* kümesine nötrosofik üçlü R-altmodülü denir.

Örnek 4.1.7: *P(A)*= { ∅, {p}, {r}, {s}, {p, r}, {p, s}, {r, s}, {p, r, s}}, (*P(A)*, ∪, ∩) nötrosofik üçlü halka üzerinde nötrosofik üçlü R-modül olsun.

S = {∅, {p}, {r}, {p, r}} ⊂ *P(A)* kümesini ele alalım. (*S*, ∪, ∩), nötrosofik üçlü R-modül olduğu örnek 4.1.2 den dolayı aşikardır. Böylece (*S*, ∪, ∩), (*P(A)*, ∪, ∩) nın bir nötrosofik üçlü R-altmodüldür.

Teorem 4.1.8: [18] (M,+), (R,+, .) nötrosofik üçlü halka üzerinde nötrosofik üçlü R-modül ve N, M nin bir nötrosofik üçlü altgrubu olsun. N, M nin bir nötrosofik üçlü R-altmodülü olması için gerek ve yeter koşul

i) N boş kümeden farklıdır.

ii) Her $a, b \in N$, $p, r \in R$ için $(a.p)+(b.r) \in N$

dir.

ispat: (⇒) N, (M,+) nın bir nötrosofik üçlü R-altmodülü ise tanım 4.1.1 ve tanım 4.1.8 den i) ve ii) elde edilir.

(⇐)°: R x $N \rightarrow N$ olduğundan ii) şartı sağlanır. Ayrıca N, M nin bir nötrosofik üçlü altgrubu ve i) den dolayı N tanım 4.1.1 şartları sağlanır.

4.2 Nötrosofik Üçlü Bölüm Modülü Ve Nötrosofik Üçlü R-Modül İzomorfizmaları

Bu bölümde nötrosofik üçlü R-modül izomorfizma teoremlerine yer verilmiştir. Ayrıca nötrosofik üçlü bölüm modülünün tanımı ve nötrosofik üçlü R-modül homomorfizmaların temel teoremleri verilmiştir. Daha sonra nötrosofik üçlü R-modüller için birinci nötrosofik üçlü izomorfizma teoremi, ikinci nötrosofik üçlü izomorfizma teoremi, üçüncü nötrosofik üçlü izomorfizma teoremi ve birkaç özel durum ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Tanım 4.2.1: [18] M ve M', nötrosofik üçlü halka üzerinde nötrosofik üçlü modüller olsun. θ: $M \rightarrow M'$ dönüşümü için;

1. θ dönüşümü nötrosofik üçlü grup ve nötrosofik üçlü grup homomorfizmasıdır. Yani; her $m, n \in M$ için

$$\theta\,(m + n) = \theta\,(m) + \theta\,(n)$$

dir.

2. Her $r \in R$ ve her $m \in M$ için

$$\theta\,(r \cdot m) = r \cdot \theta\,(m)$$

şartlarını sağlayan θ’ ya nötrosofik üçlü R-modül homomorfizması denir.

$\theta : M \to M'$ nötrosofik üçlü R-modülleri nötrosofik üçlü R-modül homomorfizması olsun;

i) θ dönüşümü birebir ise θ nötrosofik üçlü R-modül monomorfizması denir.

ii) θ dönüşümü örten ise θ nötrosofik üçlü R-modül epimorfizması denir.

iii) θ dönüşümü birebir ve örten ise θ nötrosofik üçlü izomorfizma denir.

M ve M' nötrosofik üçlü izomorfik yapıları $M \cong M'$ şeklinde gösterilir. $M \to M'$ nötrosofik üçlü izomorfik ise bu durumda θ nın tersi de $\theta^{-1} : M' \to M$ nötrosofik üçlü R-modül izomorfizmasıdır.

Örnek 4.2.2: R nötrosofik üçlü halka olsun. a ∈ R olsun. $\theta_a : R \to R$, $r \to r \cdot_R a$ sol nötrosofik üçlü R-modül homomorfizması $_RR$ den $_RR$ ye, $a \neq$ neut(a) olup o zaman θ_a nötrosofik üçlü R-modül, nötrosofik üçlü halka üzerinde nötrosofik üçlü R-modül homomorfizması değildir.

Teorem 4.2.3: [18] R bir nötrosofik üçlü halka olsun. M nötrosofik üçlü R-modül ve H nötrosofik üçlü R–altmodül olsun. Her $p \in R$ ve her $d \in M$ için, M / H nötrosofik üçlü küme tarafından nötrosofik üçlü R-modül, nötrosofik üçlü değişmeli grup yapısı tanımlanır. Yani;

$$p \cdot (d + H) = (p \cdot d) + H .$$

Ayrıca, $\theta H : M \to M / H$ yapısı örten nötrosofik üçlü R-modül homomorfizmasıdır.

İspat: İlk olarak iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Her $p \in R$, d, $\in M$ öyle ki $d + H = t + H$ (yani; $d - t \in H$), $(p \cdot d) + H = p \cdot t + H$ (yani; $p \cdot d - p \cdot t \in H$). Fakat $d - t \in H$ olup H, M nin bir altmodülü olduğundan

$$p \cdot d - p \cdot t = p \cdot (d - t) \in H \text{ dır.}$$

$r, s, d, t \in R$ *olsun.*

$r \cdot [(d + H) + (t + H)] = r \cdot [(d + t) + H] = (r \cdot (d + t)) + H = (r \cdot d + r \cdot t) + H = (r \cdot d + H) + (r \cdot t + H) = r \cdot (d + H) + r \cdot (t + H);$

$(r + s) \cdot (d + H) = ((r + s) \cdot d) + H = (r \cdot d + s \cdot d) + H = (r \cdot d + H) + (s \cdot d + H) = r \cdot (d + H) + s \cdot (d + H)$; $(r \cdot s)(d + H) = ((r \cdot_R s) d) + H = (r \cdot (s \cdot d)) + H = r \cdot (s \cdot d + H) = r \cdot (s \cdot (d + H))$; $neut(r, s)_R \cdot (d + H) = (neut(r, s)_R \cdot d) + H = d + H.$

Sonuç olarak $\theta(H (r \cdot d)) = r \cdot d + H = r \cdot (d + H) = r \cdot \theta(H (d))$ elde edilir.

Tanım 4.2.4: [18] *M, R* üzerinde nötrosofik üçlü R-modül olsun. *N* nötrosofik üçlü R-altmodül olmak üzere, nötrosofik üçlü bölüm modülü *M/N* şeklinde gösterilir.

$$M/N = \{m+N: m \in M\}$$

olup *M/N, N'*nin nötrosofik üçlü kosetlerinin kümesidir.

Teorem 4.2.5: [18] *R* nötrosofik üçlü halka ve $\delta : M \to M'$ nötrosofik üçlü R-modüllerinin nötrosofik üçlü R-modül homomorfizması olsun. *S*, nötrosofik üçlü R-modülün bir nötrosofik üçlü R-altmodülü olsun ve *Çek(δ)* yi içermektedir. *M* nötrosofik üçlü R-modül homomorfizması için;

$$\bar{\delta}: M/S \to M'$$

yapısı oluşturulabilir. Yani $\delta = \bar{\delta} \circ \delta(S)$ dir.

Ayrıca:

1. $\bar{\delta}$ vardır ve tektir;

2. $Gör(\delta) = Gör(\bar{\delta})$ and $Çek(\bar{\delta}) = Çek(\delta)/S;$

3. $\bar{\delta}$ birebirdir $\Leftrightarrow S = Çek(\delta).$

İspat: Nötrosofik üçlü bölüm grubunun temel teoremleri gereğince
$\bar{\delta}: M/S \to M'$ nötrosofik üçlü grup nötrosofik üçlü homomorfizmadır. Böylece $\delta = \bar{\delta} \circ \delta(S)$ dir.

Ayrıca,

1) Nötrosofik üçlü grup homomorfizması tektir;

2) $Gör(\delta) = Gör(\bar{\delta}), Çek(\bar{\delta}) = Çek(\delta)/S$;

3) $\bar{\delta}$ birebirdir $\Leftrightarrow$ $S = Çek(\delta)$.

Her $m \in M$ ve $r \in R$ olsun

$\bar{\delta}(r(m + S)) = r\cdot \bar{\delta}(m + S)$.

$$\bar{\delta}(r\cdot(m+S)) = \bar{\delta}(r\cdot m+S)$$

$$= \bar{\delta}(\theta S(r\cdot m)) = \delta(r\cdot m)$$

$$= r\cdot \delta(x) = r\cdot\bar{\delta}(\delta(S(m))) = r\cdot(m+S)$$

olup böylece $\bar{\delta}$ birebir ve $S = Çek(\delta)$ olduğu görülür.

Sonuç 4.2.6: [18] (Nötrosofik Üçlü R-Modül İçin Birinci Nötrosofik üçlü İzomorfizma Teoremi).

R, nötrosofik üçlü halka ve $\delta : M \rightarrow M'$ nötrosofik üçlü R-modül homomorfizması olsun.

$$m + Çek(\delta) \rightarrow \delta(m)$$

nötrosofik üçlü R-modülün bir nötrosofik üçlü R-modül izomorfizması olarak tanımlansın.

$$\tilde{\delta} : M/Çek(\delta) \rightarrow Gör(\delta)$$

Verilen özelliklere göre δ örten ise $\tilde{\delta}$ nötrosofik üçlü R-modül izomorfizmasıdır ve

$$M/Çek(\delta) \cong M'$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 4.2.7: [18] (Nötrosofik Üçlü R-Modül İçin İkinci Nötrosofik üçlü İzomorfizma Teoremi)

K ve L, nötrosofik üçlü halka üzerinde nötrosofik üçlü R-modüllerin birer nötrosofik üçlü R-altmodülleri olsun. $K \cap L$ ve $K + L$ M nin nötrosofik üçlü alt modülleri olmak üzere ve $m + (K \cap L) \rightarrow m + L$ $K /(K \cap L)$ den $K + L / L$ ye nötrosofik üçlü R-modül nötrosofik üçlü R-modül izomorfizması olarak tanımlanır. Böylece

$$K /(K \cap L) \cong K + L / L$$

dir.

İspat: $K \cap L$ nötrosofik üçlü R-modülünün bir nötrosofik üçlü R-altmodülü olduğu bilinmektedir. r ∈ R, s ∈ $K \cap L$ olsun. O zaman rs ∈ K ve rs ∈ L, K ve L M nin nötrosofik üçlü altmodülleri olduğundan r·s ∈ $K \cap L$ olur. $K + L$,nötrosofik üçlü R-modülün nötrosofik üçlü altmodülü olur. r ∈ R, s ∈ $K + L$, m ∈ K ve n ∈ L olmak üzere s = m + n dir. rm ∈ K ve rn ∈ L olduğu açıktır. Bu yüzden r·s = r·m + r·n ∈ $K + L$ olduğu görülür. İkinci nötrosofik üçlü izomorfizma teoremi gereğince m + ($K \cap L$) → m + L nötrosofik üçlü grubun nötrosofik üçlü grup izomorfizması olarak tanımlanır.

$\delta : K /(K \cap L) \rightarrow K + L / L$. r ∈ R, m ∈ K olsun böylece aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$\delta(r(m + (K \cap L)) = \delta(rm + (K \cap L)) = rm + L = r(m + L) = r\,\delta(m + (K \cap L))$. Bu yüzden δ, bir nötrosofik üçlü sol R-modül nötrosofik üçlü R-modül izomorfizmasıdır.

Teorem 4.2.8: [18] R nötrosofik üçlü halka, $\delta : M \rightarrow M'$ be a nötrosofik üçlü sol R-modül nötrosofik üçlü R-modül homomorfizması olsun. Her N, nötrosofik üçlü R-modülün nötrosofik üçlü altmodülü olmak üzere *Çek(δ)* yı içeren nötrosofik üçlü altmodülü vardır.

$d + N \rightarrow \delta(d) + \delta(N)$ nötrosofik üçlü R-modül izomorfizma tanımı gereğince $\hat{\delta}\, N : M/N \rightarrow Gör(\delta)/\delta(N)$ dir. Böylece $M/N \cong Gör(\delta)/\delta(N)$ dir.

İspat: $d + N \rightarrow \delta(d) + \delta(N)$ dönüşümünü biliyoruz. Bu dönüşüm nötrosofik üçlü grubu ve nötrosofik üçlü grup izomorfizmasını tanımlar. Böylece

$\pi = \hat{\delta}_N : M/N \rightarrow Gör(\delta)/N$ olduğu görülür.

$c \in R$, $d \in N$ olmak üzere

$$\pi\,(c(d + N)) = \pi\,(cd + N)$$

$$= \delta\,(cd) + \delta\,(N) = (c\,\delta\,(d)) + \delta\,(N)$$

$$= c(\delta\,(d) + \delta(N)) = c\,\pi\,(d + N).$$

Bu yüzden π nötrosofik üçlü R-modül nötrosofik üçlü izomorfizmadır.

Sonuç 4.2.9: [18] (Nötrosofik Üçlü R-Modül için Üçüncü Nötrosofik üçlü İzomorfizma Teoremi)

H ve B, nötrosofik üçlü halka üzerinde nötrosofik üçlü R-modülün nötrosofik üçlü altmodülleri olmak üzere ve $H \subseteq B$ olduğunu varsayalım. $m+ B \rightarrow (m + H)+H/ B$ dönüşümü M/H den $M/H/\ B\ /H$ ye nötrosofik üçlü sol R-modül nötrosofik üçlü R-modül izomorfizması olduğunu gösterir. Böylece

$$M/B \cong M/H/\ B\ /H$$

dır.

İspat: Teorem 4.2.8 uygulandığında $\theta_H\,(B) = B\,/\,H$ olmaktadır. Böylece

$$\theta_H : M \rightarrow M/H$$

dönüşümü elde edilir.

4.3. Nötrosofik Üçlü R-Modüllerde Zincir Koşulları

Tanım 4.3.1: [28] $\mathcal{N}$ nötrosofik üçlü R-modül olsun.

$$\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_3 \subset \cdots$$

şeklinde $\mathcal{N}$ nin nötrosofik üçlü alt modüllerinin tüm artan zincirlerini ele alalım.

$\forall\ m \geq k$, $m \in$ N olmak üzere $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_k$ sağlanırsa buna nötrosofik üçlü R-modülde Noether adı verilir.

P nötrosofik üçlü R-modül olsun.

$$P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \cdots$$

şeklinde $\mathcal{N}$ nin nötrosofik üçlü alt modüllerinin tüm azalan zincirlerini ele alalım.

$\forall\ m \geq k\ ,\ m\ \in \mathrm{N}$ olmak üzere $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_k$ sağlanırsa buna nötrosofik üçlü *R*-modülde Artin adı verilir.

Sonuç 4.3.2: [28] Nötrosofik üçlü R modül için verilen nötrosofik üçlü artan zincir koşulu ve azalan zincir koşulu nötrosofik üçlü gruplar için verilen nötrosofik üçlü artan zincir koşulu ve azalan zincir koşulu ile benzerlik göstermektedir. Nötrosofik üçlü grup zincirleri sadece nötrosofik üçlü grup olmayıp aynı zamanda nötrosofik üçlü normal altgrup olmaktadır.

Sonuç 4.3.3: [28] Bu bölümdeki nötrosofik üçlü azalan ve artan zincir koşulları ile ilgili sonuçların çoğu nötrosofik üçlü R-modüller için verilmiştir. Ancak önceki tanımla bu sonuçlar nötrosofik üçlü halkalar için de geçerlidir.

Örnek 4.3.4: P (M)={ $\emptyset$, {δ}, {θ}, {λ}, {δ, θ}, {δ, λ}, {θ, λ}, {δ, θ, λ}} kuvvet kümesi olmak üzere, (*P(M),* ∪, ∩) nötrosofik üçlü halka üzerinde nötrosofik üçlü R-modül olduğunu örnek 17 de gösterdik. Ayrıca $\hat{R}$ = {$\emptyset$, {a},{a, b}} ⊂ *P(M)* olacak şekilde ele aldığımızda ($\hat{R}$, ∪, ∩) NT R-module on (*P(M),* ∪, ∩) üzerinde bir nötrosofik üçlü R-modül olduğu aşikardır. Böylece ($\hat{R}$, ∪, ∩), (*P(M),* ∪, ∩) nötrosofik üçlü R-modülün nötrosofik üçlü R-altmodülüdür.

$\hat{R}_1 = \emptyset$, $\hat{R}_2$={δ}, $\hat{R}_3$={θ}, $\hat{R}_4$={λ}, $\hat{R}_5$={δ, θ}, $\hat{R}_6$={δ, λ}, $\hat{R}_7$={θ, λ}, $\hat{R}_8$={δ, θ, λ}

Olacak şekilde ele alalım.

(P(M), ∩) neut($\hat{R}_1$)=$\hat{R}_5$, neut($\hat{R}_1$)=$\hat{R}_6$ and neut($\hat{R}_1$)= $\hat{R}_8$ anti($\hat{R}_1$)=$\hat{R}_1$

($\hat{R}_1$,$\hat{R}_5$,$\hat{R}_1$), ($\hat{R}_1$,$\hat{R}_6$,$\hat{R}_1$) ($\hat{R}_1$,$\hat{R}_8$,$\hat{R}_1$) nötrosofik üçlü elemanlardır. Nötrosofik üçlü yapı olduğunu bir elemanın birden fazla birim elemana sahip olduğundan görebilmekteyiz.

$\hat{R}_1 \subseteq \hat{R}_2 \subseteq \hat{R}_5 \subseteq \hat{R}_8$, artan zincir sonlu bir adımda durduğu görülmektedir. Böylece artan zincir koşuunu sağladığından nötrosofik üçlü noether olmaktadır.

$\hat{R}_8 \supseteq \hat{R}_7 \supseteq \hat{R}_4 \supseteq \hat{R}_1$, azalan zincir sonlu bir adımda durduğu görülmektedir. Böylece azalan zincir koşuunu sağladığından nötrosofik üçlü artin olmaktadır..

Tanım 4.3.5: [28] $M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\sigma} P$ nötrosofik üçlü R-modül homomorfizması, *Gör(ϕ)=Çek(σ)* eşitliği sağlandığında tam dizi denir.

Nötrosofik üçlü R-modül homomorfizması sonlu dizi ise

$$M_0 \xrightarrow{\phi_1} M_1 \xrightarrow{\phi_2} M_2 \xrightarrow{\phi_3} \ldots \xrightarrow{\phi_{n-1}} M_{k-1} \xrightarrow{\phi_n} M_n$$

i=1,2,3,…,k-1 için

$$\text{Gör}(\phi_i)=\text{Çek}(\phi_{i+1})$$

eşitliği sağlandığında buna tam dizidir denir.

$$\{neut(0)\} \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} \{neut(0)\}$$

Dizisi kısa tam dizi olarak adlandırılır. Burada f monomorfizmdır ve g epimorfizmadır.

Teorem 4.3.6: [28] *S*, nötrosofik üçlü R-modül M nin nötrosofik üçlü R-altmodülü olsun.

(a) *M* nötrosofik üçlü noetherdir ⇔ *S* ve *M/S* de nötrosofik üçlü noetherdir.

(b) *M* nötrosofik üçlü artindir ⇔ *N* ve *M/N* de nötrosofik üçlü artindir.

İspat: Sadece (a)'yı ispatlamak yeterli olacaktır, çünkü (b) için tersi alınarak tüm kapsamaları kolayca ispatlanabilmektedir.

"⇒" *M* nötrosofik üçlü noether olsun. İlk olarak, H nötrosofik üçlü R-altmodüllerin bazı zincirlerini aşağıdaki gibi gösterelim.

$$H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots$$

Bu zincirin sabit olduğu görülmektedir. Böylece H nötrosofik üçlü noetherdir. Bunun gibi *M/H* nötrosofik üçlü olsun;

$$B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots$$

yapısı *M/H* ın nötrosofik üçlü altmodül zinciri olmaktadır. Her j∈ℕ olmak üzere M_k = $q^{-1}(P_j)$ olacak şekilde $\sigma : M \to M/H$ nötrosofik üçlü bölüm dönüşümünü ele alalım. Bu durumda

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ...$$

zinciri M nin nötrosofik üçlü altmodül zinciri olmaktadır. *M* nötrosofik üçlü noether olduğundan, her $j \geq r$ ve en az bir $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere $M_j = M_n$ eşitliği elde edilmektedir. Fakat σ örten olduğundan, bu durumda her $j \geq r$ olmak üzere

$$B_j = (M_j) = (M_n) = P_n$$

eşitliği elde edilir.

Böylece M/H nötrosofik üçlü noetherdir.

"⇐" $$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ...$$

M nin nötrosofik üçlü altmodüllerinin artan zinciri olduğunu düşünelim.

Her $j \in$ N olmak üzere $H_j = M_j \cap H$ ve $B_j = (M_j + H)/H$ kümeleri sağlıyorsa,

$$H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset ... \text{ ve } \quad B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset ...$$

sırasıyla *H* ve *M/H* nin nötrosofik üçlü altmodüllerinin zincirleri olmaktadır. Her iki küme sabit varsayarsak ve dolayısıyla r $\in$ N olacak şekilde bir eleman vardır. Öyle ki; her $j \geq r$ olmak üzere

$$H_j = H_r \text{ ve } B_j = B_r \text{ dir.}$$

Burada her j ≥ r olmak üzere değişmeli bir diyagram elde etmekteyiz.

$$\begin{array}{ccccccccc} Neut(0) & \to & H_r & \to & M_r & \to & B_r & \to & Neut(0) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ Neut(0) & \to & H_j & \to & M_j & \to & B_j & \to & Neut(0) \end{array}$$

Diyagrama baktığımızda satırlar tam sıralı olmaktadır. Sütunlar ise $M_r \to M_j$ tarafından etkilenmiştir. Sol ve sağ dikey dönüşümleri bir izomorfizmadır. Bu yüzden j ≥ r için $M_j = M_r$ eşitliği sağlanmaktadır. Böylece M nötrosofik üçlü noetherdir.

Teorem 4.3.7: [28] M ve H nötrosofik üçlü modüller olsun.

(a) $M \oplus H$ nötrosofik üçlü direkt toplam nötrosofik üçlü noetherdir ⇔ M ve H nötrosofik üçlü noetherdir.

(b) R nötrosofik üçlü noether ve M nötrosofik üçlü sonlu üreteç ise M nötrosofik üçlü noetherdir.

Nötrosofik üçlü noether için verilen önerme aynı şekilde nötrosofik üçlü artin için de geçerlidir.

İspat: Bu önermeyi sadece nötrosofik üçlü noether modüller için ispat edeceğiz. Çünkü nötrosofik üçlü artin için de aşağıdaki şartlar tam olarak sağlanmaktadır.

i. neut(0) $\rightarrow M \rightarrow M \oplus N \rightarrow N \rightarrow$ neut(0)
tam serisi elde edilmektedir.

ii. Bazı $m_1, \ldots, m_k \in M$ için

M= $((m_1,\text{neut}(m_1),\text{anti}(m_1)), \ldots ,(m_k,\text{neut}(m_k),\text{anti}(m_k))$ olsun. O zaman nötrosofik üçlü halka nötrosofik üçlü homomorfizmadır.

$\phi : R^k \rightarrow M$, $((\rho_1,\text{neut}(\rho_1),\text{anti}(\rho_1)), \ldots , (\rho_k,\text{neut}(\rho_k),\text{anti}(\rho_k)) \rightarrow \rho_1 m_1,\text{neut}(\rho_1)\text{neut}(m_1),\text{anti}(\rho_1)\text{anti}(m_1))+\cdots +(\rho_k m_k,\text{neut}(\rho_k)\text{neut}(m_k),\text{anti}(\rho_k)\text{anti}(m_k))$

yapısı örtendir. Böylece

$$neut(0) \rightarrow Çek\varphi \rightarrow R^k \overset{\varphi}{\rightarrow} M \rightarrow neut(0)$$

Şeklinde tam seri elde edilmektedir. R nötrosofik üçlü noether olduğundan R^k ve M de nötrosofik üçlü noether olmaktadır.

Teorem 4.3.8: [28] M nötrosofik üçlü R-modülü sonlu uzunluktadır ⇔ M hem nötrosofik üçlü noether hem de nötrosofik üçlü artindir.

İspat: M nin uzunluğu sonlu ise o zaman Nötrosofik üçlü alt modüllerinin tüm kesin zincirleri sonludur. Dolayısıyla, açık bir şekilde M hem nötrosofik üçlü noether hem de nötrosofik üçlü artindir.

Şimdi de tersini düşünelim. M hem nötrosofik üçlü noether hem de nötrosofik üçlü artin olsun. $M_{neut(0)}$ =neut(0) eşitliğinden başlayarak, $k \in$ N olmak üzere M_{k+1} M nin minimal nötrosofik üçlü alt modülü olsun.

$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ...$

M nin nötrosofik üçlü alt modüllerinin bir zincirini oluşturalım. M nötrosofik üçlü artin olduğundan $M_k \neq M$ olmak koşuluyla verilen zincir kesin olarak M_k yı içermektedir. Fakat, nötrosofik üçlü noether olarak ele aldığımızda Nötrosofik üçlü alt modüllerinin sonlu artan zincirini oluşturmamaktadır. En az bir $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $M_k = M$ olacak şekilde istediğimiz sonuç elde edilmektedir.

neut(0) = $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ... \subset M_k = M$

elde edilen zincir serisi M nin bir dizisi olmaktadır. Nötrosofik üçlü alt modüller M_{i-1} ve M_i ($i = 1,2,3,...,k$) aralarında bir yapı olmadığı görülmektedir.

BÖLÜM V

NÖTROSOFİK DEĞERLER İLE KARAR VERME

5.1. Karar Verme Problemleri [29]

Bu bölümde, klasik karar verme problemlerinde yaşanan belirsizliklerde daha doğru sonuçlar elde etmek için belirsizlik durumlar da dikkate alınarak nötrosofik karar verme aşaması ele alındı. Bir problem hakkında karar verirken bütün bilgiler dikkate alınarak en doğru karara ulaşılabilir. En doğru karara ulaşabilmek için analiz etmede kullanılan en güçlü matematiksel yöntemlerden biri olan karar ağacı modeline örnek verilecektir. Bu genişletilmiş model, klasik alternatiflerden daha genel ve doğru verilere dayandığından en doğru kararın verilebilmesi için nötrosofik karar ağacı kullanılacaktır.

Diğer taraftan, bir konu hakkında uzmanlar olumlu ya da olumsuz değerlendirme yaptıklarında bazı uzmanların aynı fikirde olmadıklarını görebiliriz. Bu nedenle, alınan kararın kalitesini etkileyen bir problemle yüzleşmenin en iyi çözümü 0 ile t arasında bir değer aralığı eklemek ve çıkarmak gerekir. 0 bu aralıktaki asgari değeri temsil eden, uzmanlar veya karar vericiler arasında beklenen değerler konusunda bir anlaşmazlık olmadığı anlamına gelir. t ise bu aralıkta azami değeri temsil eden, uzmanlar arasında veya karar vericiler arasında beklenen değerler konusunda bir anlaşmazlık olduğu anlamına gelir.

Vereceğimiz örnekte beklenen değerlerle ilgili tüm farklı fikirlerin [0, t] aralığında yer alacağını unutmamak şartıyla [0, t] aralığının eklenmesi ve çıkarılmasıyla beklenen değerlerin klasik mantıktan farklı sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Tüm görüşleri içeren beklenen değerleri tablolar yardımıyla karar ağacına taşıyacağız.

Örnek 5.1.1:

Aşağıdaki tabloda verildiği gibi S1, S2 ve S3 seçenekleri yüksek katılım ve düşük katılım durumlarına belirsizlik dahil edilerek değerlendirilecektir.

Tablo 5.1.1.1 Yatırım bölgelerinin genel tablosu.

	Yüksek katılım	Düşük katılım
S1	$M\pm b_1$	$N\pm b_2$
S2	$K\pm b_3$	$P\pm b_4$
S3	$R\pm b_5$	$S\pm b_6$

Tablo 5.1.1.1 de M, N, K, P, R, S beklenen değerlerin klasik bölümünü temsil etmektedir. b_1, b_2, b_3, b_4 b_5, b_6 beklenen belirsiz durumları temsil etmektedir. Ayrıca karar verecek kişiye tatil yörelerine yatırım yapmak için üç farklı seçenek sunulmaktadır. Bu seçenekler (S1) yayla bölgesinde, (S2) deniz bölgesinde ve (S3) kültürel bölgede yatırım yapma yönündedir. Karar verme aşamasında iyimser ve kötümser bakış açılarına ek olarak kararsız bakış açısı da dikkate alınacaktır. Her seçenek için yüksek katılım ve düşük katılımın beklenen değerlerine göre değerlendirme yapılacaktır.

Tablo 5.1.1.2 Yatırım bölgeleri için beklenen değerler tablosu.

	Yüksek katılım	Düşük katılım
Yayla bölgesi	250000±[0,50000]	80000±[0,15000]
Deniz bölgesi	280000±[0,15000]	70000±[0,5000]
Kültürel bölge	230000±[0,20000]	65000±[0,35000]

	Yüksek katılım	Düşük katılım
Yayla bölgesi	[200000,300000]	[65000,95000]
Deniz bölgesi	[265000,295000]	[65000,75000]
Kültürel bölge	[210000,250000]	[30000,100000]

Tablo 5.1.1.2 de uzmanlar, S1'e göre yüksek katılım durumunda yayla bölgesinde 250000 lira kazanç elde etmeyi planlar fakat belirsiz durumlar hesaba katılınca [0,50000] arasında değişen bir tahmin bize her şeye daha hazırlıklı olmamızda fayda sağlayacaktır. Düşük katılımda ise yayla bölgesinde 80000 lira kazanç elde etmeyi planlar fakat belirsiz durumlar hesaplanınca [0,15000] arasında değişen bir tahmin yine bize her şeye daha hazırlıklı olmamızda fayda sağlayacaktır.

S2'ye göre yüksek katılım durumunda deniz bölgesinde 280000 lira kazanç elde etmeyi planlar fakat belirsiz durumlar hesaba katılınca [0,15000] arasında değişen bir tahmin bize her şeye daha hazırlıklı olmamızda fayda sağlayacaktır. Düşük katılımda ise deniz bölgesinde 70000 lira kazanç elde etmeyi planlar fakat belirsiz durumlar hesaplanınca [0,5000] arasında değişen bir tahmin yine bize her şeye daha hazırlıklı olmamızda fayda sağlayacaktır.

S3'e göre yüksek katılım durumunda kültürel bölgede 230000 lira kazanç elde etmeyi planlar fakat belirsiz durumlar hesaba katılınca [0,20000] arasında değişen bir tahmin bize her şeye daha hazırlıklı olmamızda fayda sağlayacaktır. Düşük katılım 65000 lira kazanç elde etmeyi planlar fakat belirsiz durumlar hesaplanınca [0,35000] arasında değişen bir tahmin yine bize her şeye daha hazırlıklı olmamızda fayda sağlayacaktır.

Tüm beklenen değerleri hesapladıktan sonra iyimser yaklaşım, kötümser yaklaşım ve kararsız yaklaşımlar incelenecektir.

İyimser Yaklaşım:

Bu yaklaşım, mümkün olan en iyi ihtimalleri dikkate alan uzmanlar tarafından değerlendirilmiştir. Bu yaklaşımdaki uzmanların fikirleri yüksek katılım yönündedir. Dolayısıyla verilen aralıktaki maksimum parasal değer dikkate alınmıştır.

Tablo 5.1.1.3 Yüksek katılım için nötrosofik karar tablosu.

	Max Max
Yayla bölgesi	max[200000,300000]=300000
Deniz bölgesi	max[265000,295000]=295000
Kültürel bölge	max[210000,250000]=250000

Tablo 5.1.1.3'te iyimser yaklaşıma göre, yayla bölgesi seçenekler arasında en fazla kazancı sağladığından bu bölgeye yatırım yapmak en iyi seçim olacaktır. Aşağıdaki tablo 4' de ise $b_1=b_3=b_5=0$ olsaydı yani klasik duruma göre karar verilmiş olsa en iyi seçim deniz bölgesi olacaktır.

Tablo 5.1.1.4 Yüksek katılım için klasik karar tablosu.

	Yüksek katılım
Yayla bölgesi	250000
Deniz bölgesi	280000
Kültürel bölge	230000

Tablo 5.1.1.3 ve tablo 5.1.1.4'e göre nötrosofik olarak verileri genişlettiğimizde alınan kararlarda farklılaşma olduğu görülmektedir. Belirsiz durumlar dikkate alındığından nötrosofik formdan gelen sonuç klasik formdan gelecek sonuca göre yatırımcıya daha doğru karar vermesinde yardımcı olacaktır.

2- Kötümser yaklaşım: Bu yaklaşım, mümkün olan en kötü ihtimalleri dikkate alan uzmanlar tarafından değerlendirilmiştir. Bu yaklaşımdaki uzmanların fikirleri düşük

katılım yönündedir. Dolayısıyla düşük katılım durumunda verilen aralıktaki maksimum parasal değer dikkate alınmıştır.

Tablo 5.1.1.5 Düşük katılım için nötrosofik karar tablosu.

	Max Max
Yayla bölgesi	max[65000,95000]=95000
Deniz bölgesi	max[65000,75000]=75000
Kültürel bölge	max[30000,100000]=100000

Tablo 5.1.1.5’te kötümser yaklaşıma göre, kültürel bölge seçenekler arasında en fazla kazancı sağladığından bu bölgeye yatırım yapmak en iyi seçim olacaktır. Aşağıdaki tablo 6’ da ise $b_2=b_4=b_6=0$ olsaydı yani klasik duruma göre karar verilmiş olsa en iyi seçim yayla bölgesi olacaktı.,

Tablo 5.1.1.6 Düşük katılım için klasik karar tablosu.

	Düşük katılım
Yayla bölgesi	80000
Deniz bölgesi	70000
Kültürel bölge	65000

Tablo 5.1.1.5 ve tablo 5.1.1.6’ya göre nötrosofik olarak verileri genişlettiğimizde alınan kararlarda yine farklılaşma olduğu görülmektedir. Belirsiz durumlar dikkate alındığından nötrosofik formdan gelen sonuç klasik formdan gelecek sonuca göre yatırımcıya daha doğru karar vermesinde yardımcı olacaktır.

3- Kararsız Yaklaşım

Bu yaklaşım ise ne iyimser ne de karamsardır. Bu durumda olası bir fırsatı kaybetmeden en iyi seçimi yapmak için, en yüksek parasal değeri tüm seçeneklerden çıkararak kaybedilen fırsatlardan en düşüğü seçilir.

Tablo 5.1.1.7 Kararsız yaklaşım için nötrosofik karar tablosu.

	Yüksek katılım	Düşük katılım
Yayla bölgesi	[200000,300000]-[200000,300000]	[30000,100000]-[65000,95000]
Deniz bölgesi	[200000,300000]-[265000,295000]	[30000,100000]-[65000,75000]
Kültürel bölge	[200000,300000]-[210000,250000]	[30000,100000]-[30000,100000]

	Yüksek katılım	Düşük katılım
Yayla bölgesi	[0,0]	[-35000,5000]
Deniz bölgesi	[-65000,5000]	[-35000,25000]
Kültürel bölge	[-10000,50000]	[0,0]

Tablo 5.1.1.7'de görüldüğü gibi yüksek katılım ve düşük katılım durumlarındaki en yüksek parasal değeri diğer mevcut parasal değerlerden çıkardık. Böylece, her seçenek için kaybedilen fırsatların en yüksek değerlerini içeren aşağıdaki tabloya göre kararsız yaklaşım için bir sonuca ulaşılabilmektedir.

Tablo 5.1.1.8 Kararsız yaklaşım için nötrosofik karar risk tablosu.

	Kaybedilecek fırsatlar
Yayla bölgesi	[-35000,5000]
Deniz bölgesi	[-35000,25000]
Kültürel bölge	[-10000,50000]

Tablo 5.1.1.8'e göre kararsız yaklaşım durumunda parasal kaybın en az olduğu seçenek yayla bölgesi olduğundan en doğru seçim yayla bölgesi olacaktır.

Ayrıca $b_1= b_2= b_3= b_4= b_5= b_6=0$ olacak şekilde klasik forma göre değerlendirilecek olursa;

Tablo 5.1.1.9 Kararsız yaklaşım için klasik karar tablosu.

	Yüksek katılım	Düşük katılım
Yayla bölgesi	280000-250000	80000-80000
Deniz bölgesi	280000-280000	80000-70000
Kültürel bölge	280000-230000	80000-65000

	Yüksek katılım	Düşük katılım
Yayla bölgesi	30000	0
Deniz bölgesi	0	10000
Kültürel bölge	50000	15000

Tablo 5.1.1.9'da görüldüğü gibi yüksek katılım ve düşük katılım durumlarındaki en yüksek parasal değeri diğer mevcut parasal değerlerden çıkarıldı. Böylece, her

seçenek için kaybedilen fırsatların en yüksek değerlerini içeren aşağıdaki tabloya göre kararsız yaklaşım için bir sonuca ulaşılabilmektedir.

Tablo 5.1.1.10 Kararsız yaklaşım için klasik karar risk tablosu.

	Kaybedilecek fırsatlar
Yayla bölgesi	30000
Deniz bölgesi	10000
Kültürel bölge	50000

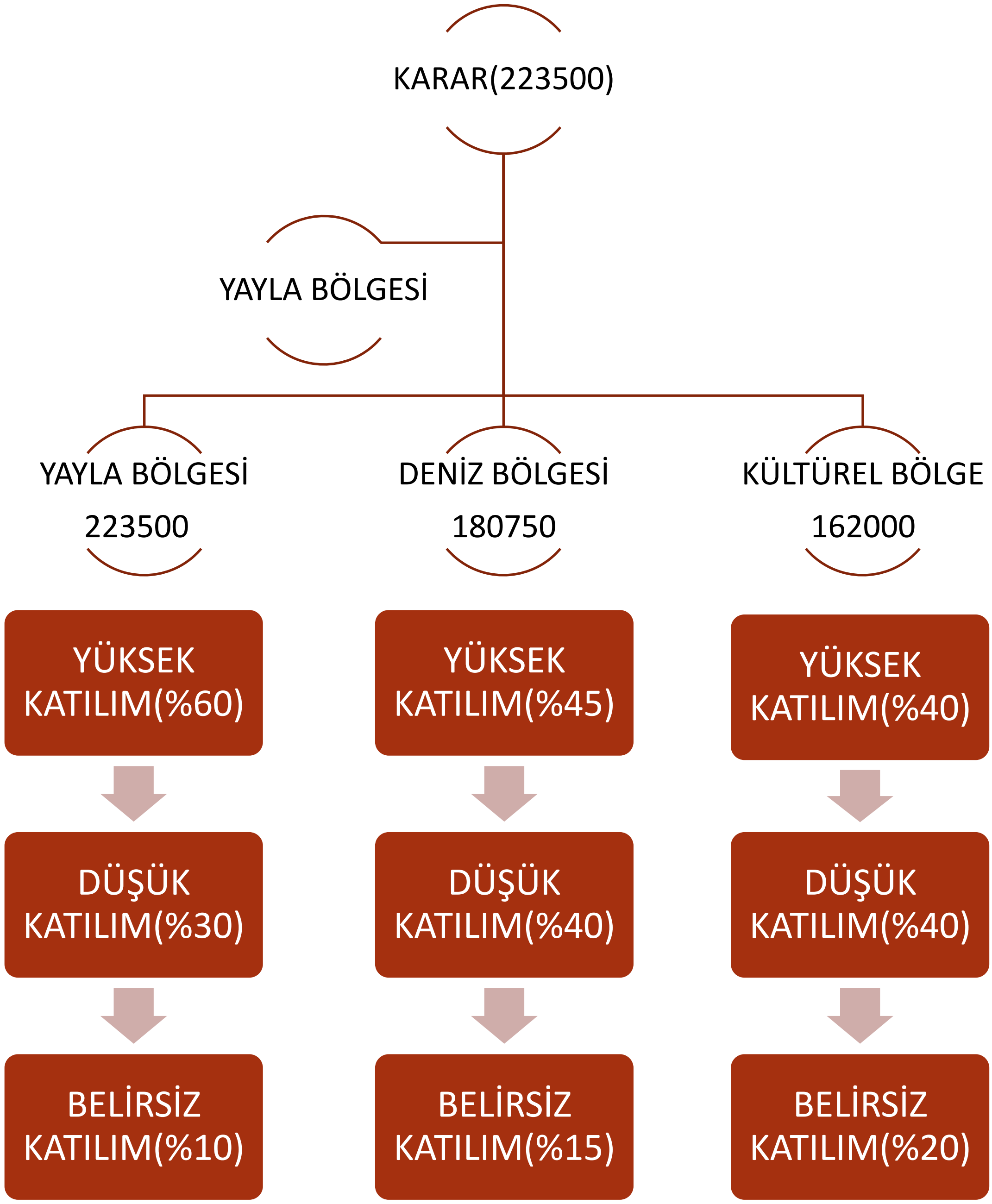
Tablo 5.1.1.10'a göre kararsız yaklaşım durumunda parasal kaybın en az olduğu seçenek deniz bölgesi olduğundan en doğru seçim deniz bölgesi olacaktır. Yine klasik formda alınacak kararın nötrosofik formda alınacak karardan farklı olduğu görüldü. Dolayısıyla, en doğru seçimi yapmak için doğru verilere sahip olan bu yönteme bağlı olmak yatırımcıya büyük fayda sağlar.

Şimdi de elde ettiğimiz verileri ağırlık yüzdelerine göre hesaplayıp nötrosofik karar ağacına taşıyalım.

Yayla bölgesi: (300000).(0,60)+(95000).(0,30)+(150000).(0,10)=223500

Deniz bölgesi: (295000).(0,45)+(75000).(0,40)+(120000).(0,15)=180750

Kültürel bölge: (250000).(0,40)+(100000).(0,40)+(110000).(0,20)=162000



Şekil 5.1.1.11 Ağırlık yüzdelerine göre nötrosofik karar ağacı.

Şekil 5.1.1.11'de oluşturulan nötrosofik karar ağacı modeline göre en iyi yatırım aracı yayla bölgesi olduğu gözlemlenmiştir.

BÖLÜM VI

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde genel olarak nötrosofik üçlü kümeler üzerinde durulmuştur. Bu nötrosofik üçlü kümeyi soyut cebirde önemli bir yapı olan modül kavramı üzerine taşıyarak oluşturulan nötrosofik üçlü modül yapısı incelenmiştir. Buna ek olarak genişletilmiş nötrosofik üçlü cebirsel yapılarından bahsedilmiştir. Bu çalışmanın nötrosofik üçlü kümeler üzerine çalışacak araştırmacılara öncülük etmesi amaçlanmıştır.

İlk olarak nötrosofik üçlü modül yapısının temelini oluşturan, değişmeli ve birimli bir R halkası ile M değişmeli toplamsal grup üzerinde tanımlanan, klasik modül ile modül homomorfizmalarının tanımı verilmiş ve nötrosofik üçlü teorisinde daha önce çalışılmış olan nötrosofik üçlü grup, nötrosofik üçlü halkaların tanım ve teoremleri verilmiştir. Bunlara ek olarak modüllerde zincir koşulları olan Artin ve Noether yapılarının tanım, teorem ve sonuçları verilerek konu hakkında ön bilgiler verilmiştir.

Bu tezde temel olarak genişletilmiş nötrosofik üçlü gruplar için temel homomorfizma teoremlerine yer verilmiştir. Nötrosofik üçlü homomorfizmanın temel teoremi verilmiş ve kanıtlanmıştır. Daha sonra genişletilmiş nötrosofik üçlü gruplar için birinci ve ikinci nötrosofik üçlü izomorfizma teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca, nötrosofik üçlü monomorfizma, nötrosofik üçlü epimorfizma, nötrosofik üçlü otomorfizma, iç nötrosofik üçlü otomorfizma ve genişletilmiş nötrosofik üçlüler için merkezin tanımı yapılmıştır. Bunlar nötrosofik cebirsel yapılara uygulanarak, farklı yapılarla ne kadar yakından ilişkili olduğu incelenmiştir. Nötrosofik üçlü homomorfizmanın temel teoremi ve nötrosofik üçlü izomorfizma teoremleri kullanılarak, nötrosofik üçlü cebirsel yapılar (nötrosofik üçlü halka, nötrosofik üçlü cisim, nötrosofik üçlü vektör uzayı, nötrosofik üçlü normlu uzay, nötrosofik üçlü

modüller) arasındaki ilişki incelenmiş ve nötrosofik üçlü cebirsel yapıların çalışma alanı genişletilmiştir.

Bu tezde nötrosofik üçlü R-modül tanımlandı. Değişmeli nötrosofik üçlü grup ve nötrosofik üçlü halka kullanılarak nötrosofik üçlü R-modül tanımlanmıştır. Ayrıca nötrosofik üçlü R–modülü klasik R–modülünden farklı olduğu gösterilmiştir. Nötrosofik üçlü R - modül, klasik vektör uzayların genişletilmiş halidir. Bu nedenle nötrosofik üçlü yapılarının kullanım alanları genişletilmiştir.

Daha sonra temel olarak nötrosofik üçlü R-modülleri için temel homomorfizma teoremlerine yer verilmiştir. Nötrosofik üçlü R-modül için açıklanan birinci, ikinci ve üçüncü nötrosofik üçlü izomorfizma teoremlerinin yanı sıra nötrosofik üçlü homomorfizmanın temel teoremleri verilmiş ve kanıtlanmıştır. Ayrıca, nötrosofik üçlü monomorfizma, nötrosofik- üçlü epimorfizma tanımlanmıştır. Bunlar nötrosofik üçlü cebirsel yapılara uygulanmıştır. Nötrosofik üçlü homomorfizmanın temel teoremi ve nötrosofik üçlü izomorfizma teoremleri kullanılarak, nötrosofik cebirsel yapılar arasındaki ilişki incelenmiştir.

Daha sonra nötrosofik üçlü R modüller için zincir koşulları gözlemlenmiş, bu yapılar değişmeli olmayan ve birimli halkalar aracılığıyla incelenmiştir. Klasik R-modül zincir koşulları genişletilerek nötrosofik üçlü R-modül yapısı oluşturulmuştur. Ayrıca modül yapılarında zincir koşullarını oluşturan nötrosofik üçlü Artin ve nötrosofik üçlü Noether'in tanım, teorem ve sonuçları verilmiştir. Ayrıca nötrosofik üçlü R-modül yapısı zincir koşullarında kullanılan ACC ve DCC tanımları verilmiştir. Böylece klasik yapı nötrosofik üçlü cebirsel yapıya taşınmış olup, klasik yapı ile nötrosofik üçlü yapı arasındaki ilişki sağlanmıştır.

Tezin son bölümünde ise klasik karar verme problemlerinde yaşanan belirsizlik sorunu dikkate alınarak nötrosofik karar verme aşamasına değinilmiştir. Bir problem hakkında karar verme aşamasındaki klasik verilere belirsizlik durumu dahil edilerek daha doğru kararlar alınmıştır. Karar vermede kullanılacak verileri analiz etmek için en güçlü matematiksel yöntemlerden biri olan karar ağacı modeli kullanılmıştır. Bu genişletilmiş model, klasik alternatiflerden daha genel ve doğru verilere dayandığından en iyi kararın verilmesi için nötrosofik karar ağacı modeli önerilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Smarandache, F. (1998). *A Unifying Field in Logics, Neutrosophy*: *Neutrosophic Probability, Set and Logic*. *American Research Press*: Reheboth, MA, USA

[2] Zadeh, A. L. (1965) . Fuzzy sets. *Information and Control* , **8(3)**, 338-353.

[3] Atanassov, T. K. (1986). Intuitionistic Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets System*, **20**, 87–96

[4] Sahin, M., Kargın, A. (2017). Neutrosophic Triplet Metric Space and Neutrosophic Triplet Normed Space, *ICMME* , Şanlıurfa, Turkey.

[5] Smarandache, F., Ali, M. (2016). Neutrosophic Triplet Group. *Neural Computing and Applications*, 1-7.

[6] Smarandache, F., Ali, M. (2017). Neutrosophic Triplet Field Used in Physical Applications, (Log Number: NWS17-2017-000061), *18th Annual Meeting of the APS Northwest Section*, Pacific University, Forest Grove, OR, USA.

[7] Smarandache, F., Ali, M., Khan M (2018). Study on The Development of Neutrosophic Triplet Ring and Neutrosophic Triplet Field. *Mathematics*, *6*, 46.

[8] Smarandache, F., Ali, M. (2014). The Neutrosophic Triplet Group and its Application to Physics, *presented by F. S. to Universidad Nacional de Quilmes*, Department of Science and Technology, Bernal, Buenos Aires, Argentina.

[9] Olgun, N., Bal, M. (2017). Neutrosophic Modules, *Neutrosophic Operational Research*, **2(9)**, 181-192.

[10] Smarandache, F., Ali, M. (2017). Neutrosophic Triplet Ring and its Applications, (Log Number: NWS17-2017-000062), *18th Annual Meeting of the APS Northwest Section*, Pacific University, Forest Grove, OR, USA.

[11] Sahin, M., Kargın, A. (2017). Neutrosophic Triplet Normed Space, *Open Physics*, **15**, 697-704.

[12] Sahin, M., Kargın, A. (2017). Neutrosophic Triplet Inner Product Space, *Neutrosophic Operational Research*, **2(10)**, 193-215.

[13] Smarandache, F., Sahin, M., Kargın, A. (2018). Neutrosophic Triplet G-Module, *Mathematics – MDPI*, 6, 53.

[14] Bal, M., Shalla, M. M., Olgun, N. (2018). Neutrosophic Triplet Cosets and Quotient Groups, *Symmetry – MDPI*, **10**, 126.

[15] Şahin, M., Kargın, A., Çoban, M. A. (2018) Fixed Point Theorem For Neutrosophic Triplet Partial Metric Space, *Symmetry – MDPI*, **10**, 240.

[16] Kandasamy, W.B., Smarandache, F. (2006) Some Neutrosophic Algebraic Structures and Neutrosophic N-Algebraic structures, *Published by Hexis*, Arizona, USA.

[17] Çelik, M., Shalla, M. M., Olgun, N. (2018). Fundamental Homomorphism Theorems For Neutrosophic Extended Triplet Groups, *Symmetry- MDPI* **10**, 32.

[18] Çelik, M., Olgun, N. (2019). Neutrosophic Triplet R-Module, *Neutrosophic Triplet Structures, Volume I*, 35-42.

[19] Smarandache, F. (2016). Neutrosophic Extended Triplets, *Tempe, AZ, Special Collections*, Arizona State University

[20] Yiqiang, Z. (1997). Relative Chain Conditions and Module Classes, *Communications In Algebra*, **25(2)**, 543-557.

[21] Şahin, M., Deli, I., Ulucay, V. (2016). Similarity Measure Of Bipolar Neutrosophic Sets And Their Application To Multiple Criteria Decision Making, *Neural Comput & Applic.*, ***10,*** *1007/S00521.*

[22] Şahin, M., Olgun, N., Uluçay, V., Kargın, A., Smarandache, F. (2017). A New Similarity Measure Based On Falsity Value Between Single Valued Neutrosophic Sets Based On The Centroid Points Of Transformed Single Valued Neutrosophic Numbers With Applications To Pattern Recognition, *Neutrosophic Sets and Systems*, **15**, 31-48.

[23] Ulucay, V., Sahin, M., Hassan, N. (2018). Generalized Neutrosophic Soft Expert Set for Multiple-Criteria Decision-Making. *Symmetry,* **10**, 437.

[24] Kharal, A. (2014). "A Neutrosophic Multi-Criteria Decision Making Method," *New Mathematics and Natural Computation,* vol. 10, no. **02**, pp. 143-162 .

[25] Sharp, R.Y. (2000). Steps in Commutative Algebra. 2nd edition. *Part of London Mathematical Society Student Texts*. Britain. Cambridge University Press.

[26] Çelik, M., Olgun, N. (2021). "Fundamental Homomorphism Theorems for Neutrosophic Triplet Module. "*Neutrosophic Sets and Systems*" **46**, 1.

[27] Çelik, M., Olgun, N. (2021). Neutrosophic Triplet R-Module Chain Conditions, *NeutroAlgebra Theory, Volume I* , 207-219.

[28] Çelik, M., Olgun, N. (2021). Decision-Making Problem With Neutrosophic Values, *NeutroAlgebra Theory, Volume I* , 186-197.

[29] Wang, H., Smarandache, F., Zang, Y., Sunderraman, R. (2010). Single Valued

Neutrosophic Sets. *Multispace and Multistructure.* **4**, 410-413.

This book is generally concerned with the neutrosophic triplet module structure formed by a neutrosophic triplet on the commutative R ring. In this book, it is aimed to establish a module structure on the neutrosophic triplet. Then, the definitions and theorems of neutrosophic triplet submodule, neutrosophic triplet quotient module and neutrosophic triplet module homomorphisms are given with examples. This book consists of six chapters. In the introductory part of the book, the historical development process of the neutrosophic structure theory is given. In the second part, the necessary preliminary information about the neutrosophic triplet modules has been compiled. In the third chapter, the subjects of the neutrosophic extended triplet, subgroup, coset, normal subgroup and factor group were studied. In addition to this study, the definitions of neutrosophic extended triplet image, neutrosophic extended triplet kernel and neutrosophic extended triplet inverted image are included. In the fourth chapter, the subject of neutrosophic triplet modules is examined in detail. In addition, the definitions of ascending chain condition (ACC) and descending chain condition (DCC) used in neutrosophic triplet R-module structure chain conditions are given. In the fifth chapter, an example of neutrosophic decision tree model is given by including indeterminancy into classical logic. Finally, in the sixth chapter, the results and suggestions obtained in the book are given. As a result of the studies, it has been observed that the neutrosophic triplet algebra structure is different from the classical algebra structure.

ISBN 978-1-59973-736-2

9 781599 737362 >